Síkgráfok

(négyszín-tétel, Kuratowski-tétel, Euler-formula)

Kombinatorika

11. előadás

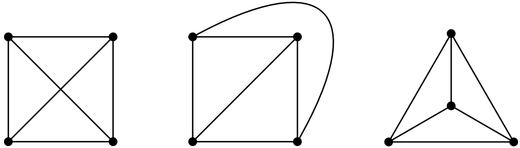
SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2016. április 26.

Definíció. Egy gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

Ebbe a definícióba az is beleértendő, hogy az élgörbék nem önátmetszők, és egy élgörbe a végpontjain kívül más csúcsponton nem halad át.

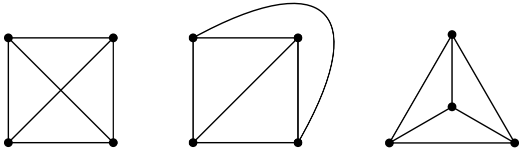
Példa. K_4 síkgráf. Ezt például az ábrán látható 2. és 3. lerajzolás is bizonyítja:



Definíció. Egy gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

Ebbe a definícióba az is beleértendő, hogy az élgörbék nem önátmetszők, és egy élgörbe a végpontjain kívül más csúcsponton nem halad át.

Példa. K_4 síkgráf. Ezt például az ábrán látható 2. és 3. lerajzolás is bizonyítja:

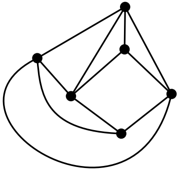


Definíció. Az előző definícióban szereplő, síkgráfságot bizonyító lerajzolásokat a továbbiakban szép lerajzolásoknak hívjuk.

Példa. A fenti ábrán K_4 standard (bal oldali) lerajzolása nem szép, a másik két lerajzolás szép.

Definíció. Egy gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

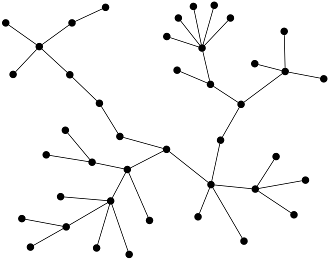
További példák síkgráfokra és szép lerajzolásokra 1.



Definíció. Egy gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

További példák síkgráfokra és szép lerajzolásokra 2.

A fák síkgráfok.



Építsük fel ághajtásokkal a fát, és közben rajzoljuk is le a síkra. Az ághajtás mindig megvalósítható úgy, hogy már lerajzolt részbe ne metsszen bele az új él (a „kihajtó ág").

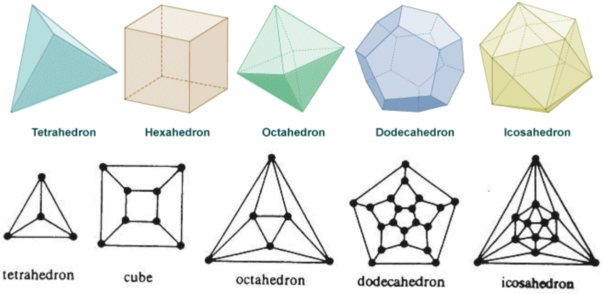
A gyökeres fák megszokott lerajzolására gondolva is világos a síkgráfság.

Definíció. Egy gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

További példák síkgráfokra és szép lerajzolásokra 3.

Egy konvex poliéder csúcsai és élei által alkotott gráf síkgráf.

Például a szabályos testek + a gráfjaik szépen lerajzolva:

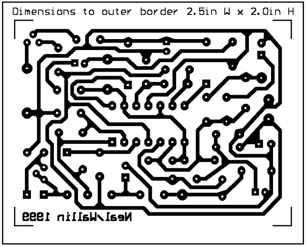


„Képzeljük üvegnek az oldallapokat, és nagyon közelről kukucskáljunk be egy oldallapon.”

Sík vagy gömbfelület? Mindegy. Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható le szépen a síkra, ha szépen lerajzolható a gömbfelületre. Így a síkgráfok definíciójában „sík” helyett „gömbfelületet” is írhattunk volna. Gyakran kényelmesebb is a gömbfelülettel dolgozni, ott néhány dolog „szimmetrikusabb”.

Sík vagy gömbfelület? Mindegy. Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható le szépen a síkra, ha szépen lerajzolható a gömbfelületre. Így a síkgráfok definíciójában „sík” helyett „gömbfelületet” is írhattunk volna. Gyakran kényelmesebb is a gömbfelülettel dolgozni, ott néhány dolog „szimmetrikusabb”.

Gráfok lerajzolásai a gyakorlatban. Nyomtatott áramkör tervezésnél egy szempont, hogy a vezetékeknek megfelelő élgörbék minél kevesebbszer metsszék egymást . . .

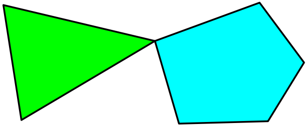


Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők'' (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határszakaszuk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges'' határ?)

Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők'' (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határszakaszuk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges'' határ?)

A feltételekről:

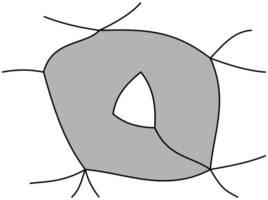
1. Az ábrán látható háromszög és ötszög alakú országok nem szomszédosak, mert nincs közös (pozitív hosszúságú) határszakaszuk; egy közös pont nem határszakasz.



Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők” (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határszakaszuk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges” határ?)

A feltételekről:

2. Ezen az ábrán egy önmagával szomszédos ország látható (ami tiltott), szürkével jelölve:

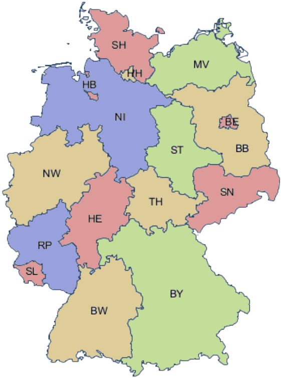


Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők'' (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határszakaszuk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges'' határ?)

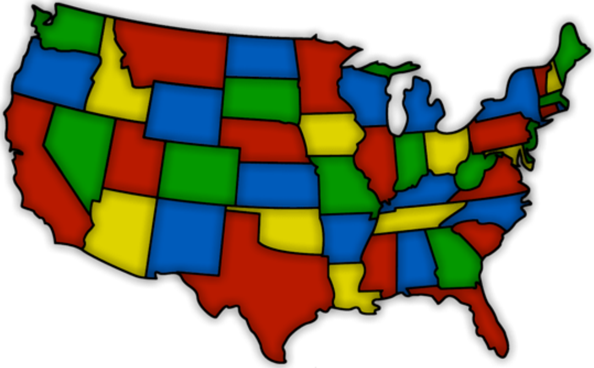
Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?

Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?

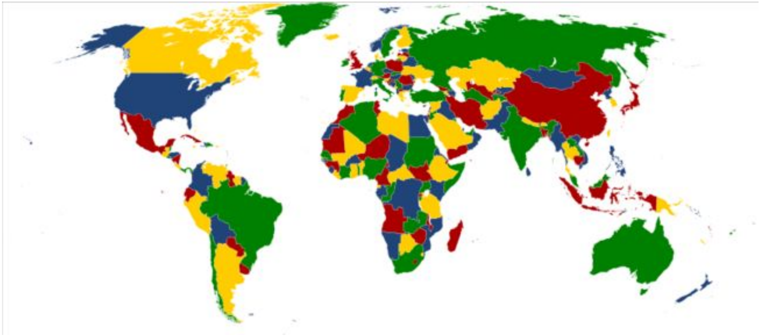
Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



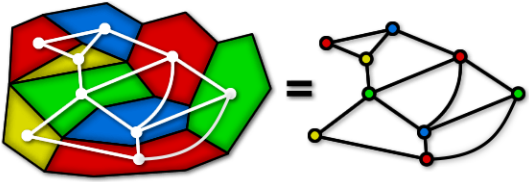
Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



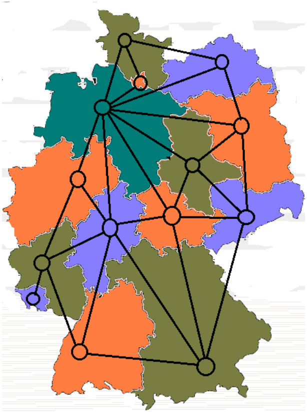
A matematikusok azt sejtették, hogy a térképszínezési problémára igen a válasz. Ennek bizonyítására több mint 100 évet kellett várni.

Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?

Ez a probléma megfogalmazható a gráfelmélet nyelvén. Tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai az adott országok, és két csúcs (ország) pontosan akkor összekötött, ha szomszédosak a térképen, és annyi éllel, ahány közös határszakaszuk van. A térképszínezési probléma azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy $\chi(G) \leq 4$.

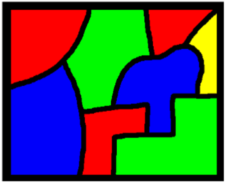


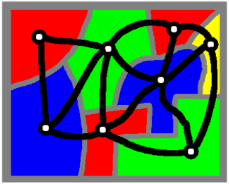
Térképszínezési probléma (1852). Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



Az így megkonstruált G gráf síkgráf!

Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost" (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt", és a fővárosból csillagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák" a határátkelőkhőz†. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbékké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel G-t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy G-ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)

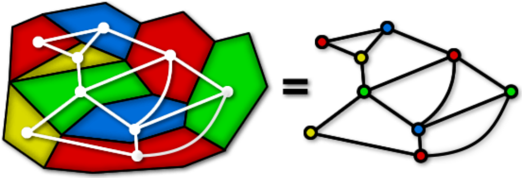




† Ismét a szemléletünkre hagyatkozunk: Nem bizonyítjuk precízen, hogy ez a csillagszerű úthálózat mindig megvalósítható összefüggő országokban; de igaz.

Az így megkonstruált G gráf síkgráf!

Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost" (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt", és a fővárosból csillagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák" a határátkelőkhőz†. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbékké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel G-t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy G-ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)



† Ismét a szemléletünkre hagyatkozunk: Nem bizonyítjuk precízen, hogy ez a csillagszerű úthálózat mindig megvalósítható összefüggő országokban; de igaz.

Az így megkonstruált G gráf síkgráf!

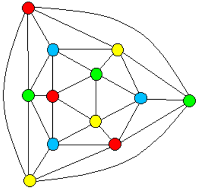
Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost" (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt", és a fővárosból csillagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák" a határátkelőkhőz†. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbékké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel G-t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy G-ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)

A térképszínezési problémára tehát igenlő választ ad a következő mély tétel (belátható, hogy valójában ekvivalens vele):

Négyszín-tétel. Minden hurokélmentes síkgráf csúcsai jól színezhetők 4 színnel.

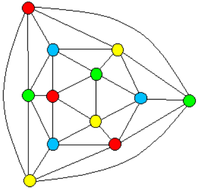
Másszóval, tetszőleges hurokélmentes G síkgráfra $\chi(G) \leq 4$.

Négyszín-tétel. G hurokélmentes síkgráf $\Longrightarrow \chi(G) \leq 4$.



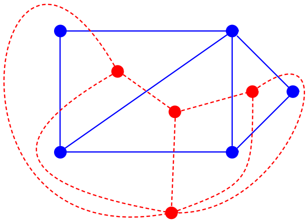
Megjegyzés. Ez a tétel a matematika egyik csúcsteljesítménye. Appel és Haken bizonyították be 1976-ban (139 oldalas cikk + számítógépes esetvizsgálat, 1200 órás futási idővel), akkoriban ez nehezen volt ellenőrizhető. Robertson, Sanders, Seymour és Thomas 1997-ben egyszerűsítették a bizonyítást és a számítógépes programot is (42 oldalas cikk + bárki által futtatható nyílt forrású program). Ma már nem kétséges a tétel igaz volta, bár számítógép-mentes bizonyítás máig nincs.

Négyszín-tétel. G hurokélmentes síkgráf $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 4$.



Ha több színt is használhatunk. Azt nem nehéz látni, hogy hat szín mindig elég hurokélmentes síkgráfok színezéséhez; ez a hatszín-tétel, amit gyakorlaton tárgyalunk majd. Az ötszín-tétel is megérthető BSc-s ismeretanyaggal, ennek bizonyítása elolvasható a kurzus honlapján.

A térképszínezési problémánál az országhatárok tekinthetők egy H síkgráf szép lerajzolásának. Az országok színezéséhez megkonstruált G gráf ezen H síkgráf duálisa volt (pontosabban annak feszített részgráfja, ha van olyan része a síknak/gömbfelületnek, amely nem tartozik egyik országhoz sem). A duális gráf fogalmának tárgyalása nem fér bele a rendelkezésre álló időkeretbe, de az érdeklődő hallgatók elolvashatják a honlapon.



A síkgráfság bizonyítása „egyszerű”: Csak fel kell mutatni a vizsgált gráf egy szép lerajzolását.

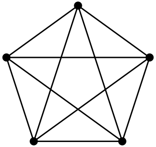
A síkgráfság bizonyítása „egyszerű”: Csak fel kell mutatni a vizsgált gráf egy szép lerajzolását.

De hogyan lehet azt bizonyítani, hogy egy gráf NEM síkgráf, azaz hogy nem létezik szép lerajzolása?

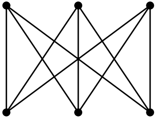
A síkgráfság bizonyítása „egyszerű": Csak fel kell mutatni a vizsgált gráf egy szép lerajzolását.

De hogyan lehet azt bizonyítani, hogy egy gráf NEM síkgráf, azaz hogy nem létezik szép lerajzolása?
Nemsokára látni fogjuk, hogy erre van egy univerzális módszer: mindig lehet egy bizonyos fajta részgráf megtalálásával indokolni a nem-síkgráfságot.

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.



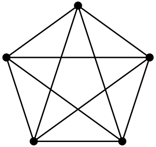
K_5



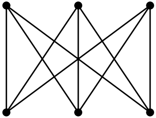
$K_{3,3}$

$K_{3,3}$-at szokás „három ház – három kút'' gráfnak is nevezni.

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.



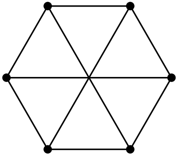
K_5



$K_{3,3}$

$K_{3,3}$-at szokás „három ház – három kút'' gráfnak is nevezni.

Emlékeztető (gyakorlatról). $K_{3,3}$ egy alternatív lerajzolása:



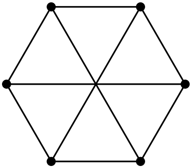
$K_{3,3}$

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Bizonyítás. Csak $K_{3,3}$-ra bizonyítjuk az állítást. K_5-re hasonlóan megy, a végén kell csak egy picivel többet „magyarázkodni”.

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

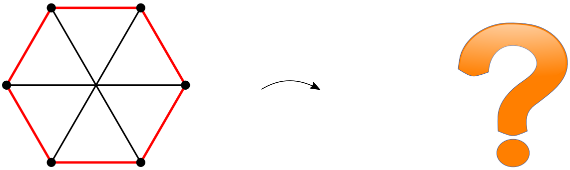
Biz. Indirekt tfh. $K_{3,3}$-nak van egy szép lerajzolása.



$K_{3,3}$

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

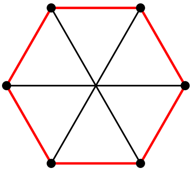
Biz. Indirekt tfh. $K_{3,3}$-nak van egy szép lerajzolása. Egy gráfelméleti kör élei mindig egy nem önátmetsző zárt görbét alkotnak a szép lerajzolásban, így a pirossal jelölt (Hamilton-)kör élei is.



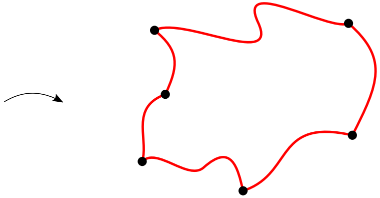
$K_{3,3}$

Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Biz. Indirekt tfh. $K_{3,3}$-nak van egy szép lerajzolása. Egy gráfelméleti kör élei mindig egy nem önátmetsző zárt görbét alkotnak a szép lerajzolásban, így a pirossal jelölt (Hamilton-)kör élei is.

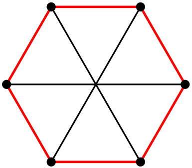


$K_{3,3}$

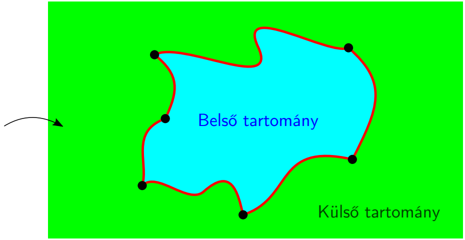


Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Biz. Indirekt tfh. $K_{3,3}$-nak van egy szép lerajzolása. Egy gráfelméleti kör élei mindig egy nem önátmetsző zárt görbét alkotnak a szép lerajzolásban, így a pirossal jelölt (Hamilton-)kör élei is. A lényeg az, hogy a nem önátmetsző zárt görbék mindig két tartományra, egy „deformált körlap" belső részre, és egy külső részre osztják a síkot. Ez intuitíve elég nyilvánvaló, de a precíz bizonyítása NEHÉZ. (Ez a Jordan–Schönflies-tétel.) A továbbiakban is inkább a geometriai szemléletünkre támaszkodunk, de a leírtak precízzé tehetők.

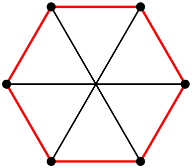


$K_{3,3}$

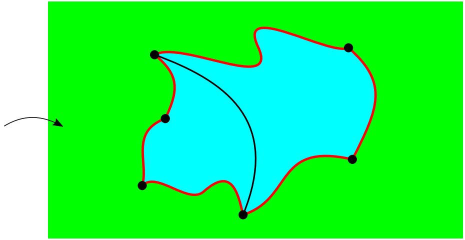


Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

A piros kör élein kívül van 3 él („húr''), amelyek a kör szemközti pontjait kötik össze. A szép lerajzolásban a piros zárt görbét nem metszhetik át a húrok görbéi (a piros görbe egy „fal'' számukra), így minden húr görbéje teljes egészében a piros görbe valamelyik tartományában (a belső vagy a külső tartományban) halad.

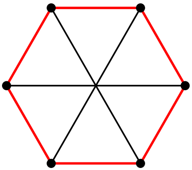


$K_{3,3}$

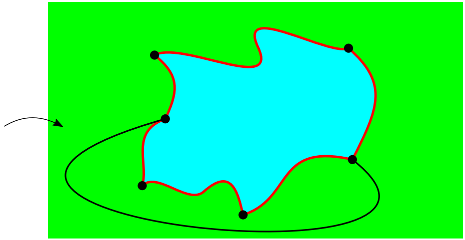


Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

A piros kör élein kívül van 3 él („húr''), amelyek a kör szemközti pontjait kötik össze. A szép lerajzolásban a piros zárt görbét nem metszhetik át a húrok görbéi (a piros görbe egy „fal'' számukra), így minden húr görbéje teljes egészében a piros görbe valamelyik tartományában (a belső vagy a külső tartományban) halad.



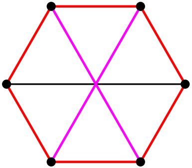
$K_{3,3}$



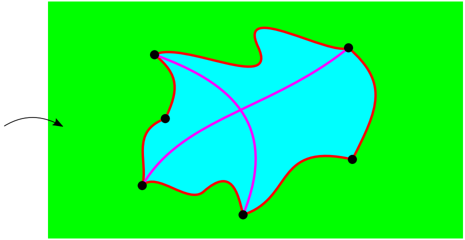
Tétel. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

A skatulyaelv szerint ezen 3 „húr" görbéje közül legalább kettő ugyanabban a tartományban halad. De ez nem lehetséges átmetszés nélkül, ellentmondás. (Ha egy élgörbét berajzolunk, akkor az „kettévágja" a tartományt úgy, hogy a másik élgörbe két végpontja különböző félbe esik. A rajz a belső tartományra szemlélteti ezt, de a külső tartományra is ugyanúgy igaz[†].) □

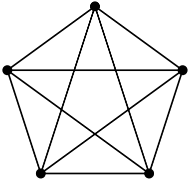
[†] Ha a gömbfelületen dolgozunk, akkor a belső és külső tartomány között nincs is „érdemi különbség", a külső tartomány is ugyanúgy „deformált körlap", mint a belső.



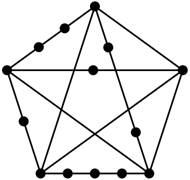
$K_{3,3}$



Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk”[†]. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában” vesz részt!) G is felosztása saját magának.



K_5

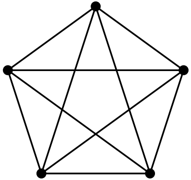


K_5 egy felosztása

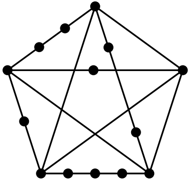
[†] **Precíz definíció.** Ha a G gráf minden $e = uv$ élét helyettesítjük egy P_e uv úttal úgy, hogy ezen utak belső pontjai páronként diszjunktak, akkor a kapott gráfot G felosztásának nevezzük. (Hurokél esetén értelemszerűen körrel helyettesítünk.)

Ha P_e 1 hosszú, akkor „nem teszünk új csúcsot az e élre”.

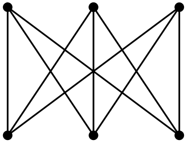
Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk"†. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában" vesz részt!) G is felosztása saját magának.



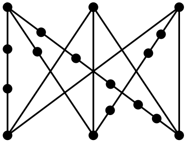
K_5



K_5 egy felosztása



$K_{3,3}$

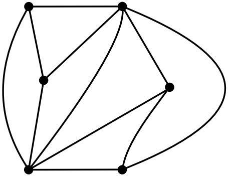


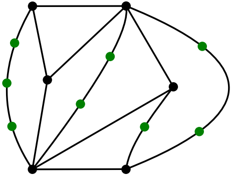
$K_{3,3}$ egy felosztása

Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk”[†]. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában” vesz részt!) G is felosztása saját magának.

Észrevétel. Legyen G' a G egy tetszőleges felosztása. Igaz a következő: G' pontosan akkor síkgráf, ha G síkgráf.

Szép lerajzolás szempontjából az új csúcsok olyanok, mintha „ott se lennének”: egy több darabra osztott élt ugyanúgy kell lerajzolni, mintha továbbra is egy él lenne.


G


G'

Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk”†. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában” vesz részt!) G is felosztása saját magának.

Észrevétel. Legyen G' a G egy tetszőleges felosztása. Igaz a következő: G' pontosan akkor síkgráf, ha G síkgráf.

Következmény. K_5 és $K_{3,3}$ felosztásai nem síkgráfok.

Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk"†. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában" vesz részt!) G is felosztása saját magának.

Észrevétel. Legyen G' a G egy tetszőleges felosztása. Igaz a következő: G' pontosan akkor síkgráf, ha G síkgráf.

Következmény. K_5 és $K_{3,3}$ felosztásai nem síkgráfok.

Észrevétel. Ha G síkgráf, akkor minden R részgráfja is az. (Hiszen G egy szép lerajzolása egyúttal R-et is szépen lerajzolja.) Másszóval, ha egy gráfnak van olyan részgráfja, ami nem síkgráf, akkor a gráf maga sem lehet síkgráf.

Definíció. A G' gráf a G gráf felosztása, ha G' megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleire „új csúcsokat helyezünk”[†]. (Az új csúcsok mindig másodfokú csúcsok lesznek, minden új csúcs csak egy él „felosztásában” vesz részt!) G is felosztása saját magának.

Észrevétel. Legyen G' a G egy tetszőleges felosztása. Igaz a következő: G' pontosan akkor síkgráf, ha G síkgráf.

Következmény. K_5 és $K_{3,3}$ felosztásai nem síkgráfok.

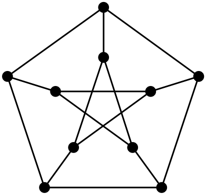
Észrevétel. Ha G síkgráf, akkor minden R részgráfja is az. (Hiszen G egy szép lerajzolása egyúttal R-et is szépen lerajzolja.) Másszóval, ha egy gráfnak van olyan részgráfja, ami nem síkgráf, akkor a gráf maga sem lehet síkgráf.

Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

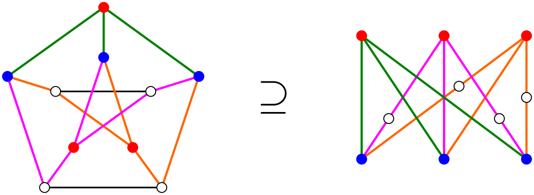
Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

Példa. A Petersen-gráf nem síkgráf, mert tartalmazza $K_{3,3}$ egy felosztását:



Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

Példa. A Petersen-gráf nem síkgráf, mert tartalmazza $K_{3,3}$ egy felosztását:



Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

Ezzel megadtunk az összes nem-síkgráfot:

Kuratowski-tétel. Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmazza sem K_5, sem $K_{3,3}$ egyik felosztását sem (részgráfként).

A tétel nehéz irányát nem bizonyítjuk.

Következmény. Tehát ha egy gráf tartalmazza (részgráfként) K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor a gráf nem síkgráf.

Ezzel megadtunk az összes nem-síkgráfot:

Kuratowski-tétel. Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmazza sem K_5, sem $K_{3,3}$ egyik felosztását sem (részgráfként).

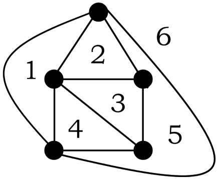
A tétel nehéz irányát nem bizonyítjuk.

Összegzés. Ha egy konkrét G gráfról kell eldöntenünk, hogy síkgráf-e, akkor ehhez elég kétfajta érvelést ismerni: Ha G síkgráf, akkor ez igazolható úgy, hogy felmutatunk egy szép lerajzolást. Ha G nem síkgráf, akkor a Kuratowski-tétel szerint találni fogunk benne K_5- vagy $K_{3,3}$-felosztást, és ez korábbi észrevételeink szerint bizonyítja a nem-síkgráfságot (ehhez nem is kell ismernünk a Kuratowski-tétel bizonyítását).

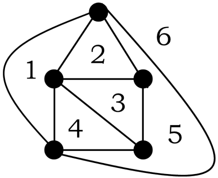
Definíció. Vegyük egy G síkgráf rögzített szép lerajzolását. A lerajzolás élgörbéit „kerítéseknek'' („országhatároknak'') tekintve, a lerajzolás tartományokra („országokra'') osztja a síkot†. Megjegyezzük, hogy a külső, végtelen nagy régió is tartomány.

Kialakulhatnak önmagukkal szomszédos tartományok is (most nincs semmilyen megkötés a síkgráfra).

Példa. Egy síkgráf szép lerajzolása hat tartománnyal (a 6-os szám a külső tartományt jelöli):



Definíció. Vegyük egy G síkgráf rögzített szép lerajzolását. A lerajzolás élgörbéit „kerítéseknek" („országhatároknak") tekintve, a lerajzolás tartományokra („országokra") osztja a síkot[†]. Megjegyezzük, hogy a külső, végtelen nagy régió is tartomány.



[†] Ezt a következőképpen lehet precízzé tenni. Legyen $\overline{\mathcal{L}}$ a sík azon pontjainak halmaza, amelyek „nem szerepelnek" G szóban forgó lerajzolásában, tehát nem csúcspontok, és nem halad át rajtuk élgörbe. Ezen az $\overline{\mathcal{L}}$ halmazon definiálunk egy $\sim$ „egy tartományban lenni" relációt: Legyen $x \sim y$ pontosan akkor, ha x és y összeköthető olyan (folytonos) görbével, amely végig $\overline{\mathcal{L}}$-ben halad. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a $\sim$ ekvivalenciareláció. Ezen $\sim$ reláció ekvivalenciaosztályait nevezzük a lerajzolás tartományainak.

Definíció. Vegyük egy G síkgráf rögzített szép lerajzolását. A lerajzolás élgörbéit „kerítéseknek" („országhatároknak") tekintve, a lerajzolás tartományokra („országokra") osztja a síkot†. Megjegyezzük, hogy a külső, végtelen nagy régió is tartomány.

Euler alábbi tétele szerint a csúcsok száma és az élek száma egyértelműen meghatározza a tartományok számát:

Euler-formula. Egy összefüggő G síkgráf tetszőleges szép lerajzolására

$$c - e + t = 2,$$

ahol c a csúcsok száma, e az élek száma, és t a tartományok száma.

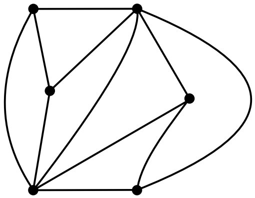
Kiegészítés. Az összefüggőség fontos feltétel: az általános esetben $c - e + t = k + 1$, ahol k a komponensek száma. (Ezt nem bizonyítjuk, de könnyen következik az összefüggő esetből.)

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow$ $c - e + t = 2$.

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám $-$ élszám $+$ tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow \; c - e + t = 2$.

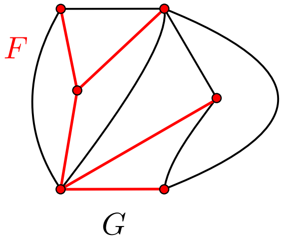
Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



G

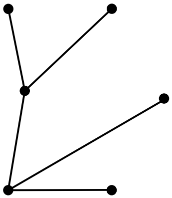
G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow$ $c - e + t = 2$.

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám $-$ élszám $+$ tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow$ $c - e + t = 2$.

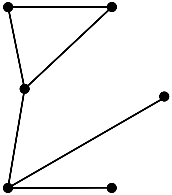
Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 5$$
$$\widetilde{t} = 1$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

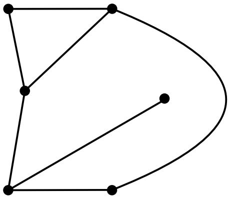
Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám $-$ élszám $+$ tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 6$$
$$\widetilde{t} = 2$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow \; c - e + t = 2$.

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



$\widetilde{c} = 6$

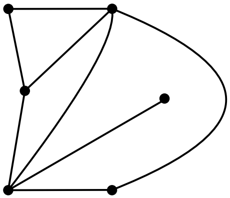
$\widetilde{e} = 7$

$\widetilde{t} = 3$

$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

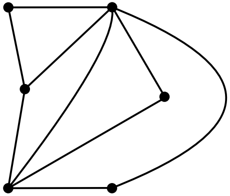
Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám'' aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális'').



$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 8$$
$$\widetilde{t} = 4$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



$\widetilde{c} = 6$

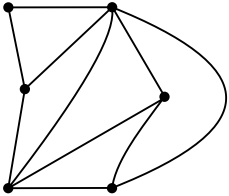
$\widetilde{e} = 9$

$\widetilde{t} = 5$

$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\; c - e + t = 2.$

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").



$\widetilde{c} = 6$

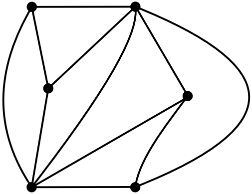
$\widetilde{e} = 10$

$\widetilde{t} = 6$

$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

Biz. Vegyük egy tetsz. összefüggő G síkgráf egy szép lerajzolását. **Ugyanezt** a lerajzolást lépésenként állítjuk elő: Először rögtön G egy feszítőfáját rajzoljuk le (G öf.), majd egyesével húzzuk be a többi élgörbét, és közben figyeljük a „csúcsszám − élszám + tartományszám" aktuális értékét, amelyet $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ módon rövidítünk majd (a hullámjellel arra utalunk, hogy „aktuális").

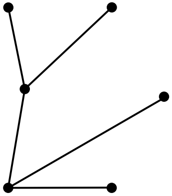


G

$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 11$$
$$\widetilde{t} = 7$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow \ c - e + t = 2$.

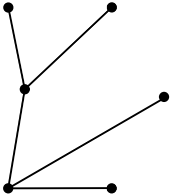
1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.



$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 5$$
$$\widetilde{t} = 1$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.



$$\widetilde{c} = 6$$
$$\widetilde{e} = 5$$
$$\widetilde{t} = 1$$
$$\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$$

* Szemléletesen nyilvánvaló, hogy fák lerajzolásánál 1 tartomány alakul ki. (Kicsit precízebben: Építsük fel a fát ághajtásokkal, és győzzük meg magunkat arról, hogy egy „kihajtó ág” soha nem vág le új tartományt.)

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow$ $c - e + t = 2$.

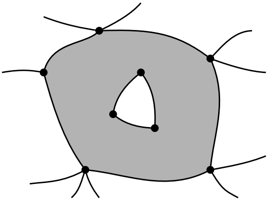
1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.
2. Ha egy összefüggő síkgráf szép lerajzolásában két csúcsot összekötünk (élmetszés nélkül), akkor a berajzolt élgörbe egy korábbi tartományt két részre vág†, így az élszám is és a tartományszám is 1-gyel nő (a csúcsszám nem változik), vagyis a vizsgált $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ mennyiség nem változik.

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.

2. Ha egy összefüggő síkgráf szép lerajzolásában két csúcsot összekötünk (élmetszés nélkül), akkor a berajzolt élgörbe egy korábbi tartományt két részre vág†, így az élszám is és a tartományszám is 1-gyel nő (a csúcsszám nem változik), vagyis a vizsgált $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ mennyiség nem változik.

† Összefüggőség kikötése nélkül ez nem feltétlenül igaz! Példa:

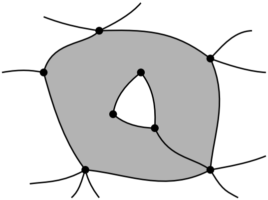


G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.

2. Ha egy összefüggő síkgráf szép lerajzolásában két csúcsot összekötünk (élmetszés nélkül), akkor a berajzolt élgörbe egy korábbi tartományt két részre vág†, így az élszám is és a tartományszám is 1-gyel nő (a csúcsszám nem változik), vagyis a vizsgált $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ mennyiség nem változik.

† Összefüggőség kikötése nélkül ez nem feltétlenül igaz! Példa:



G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.

2. Ha egy összefüggő síkgráf szép lerajzolásában két csúcsot összekötünk (élmetszés nélkül), akkor a berajzolt élgörbe egy korábbi tartományt két részre vág†, így az élszám is és a tartományszám is 1-gyel nő (a csúcsszám nem változik), vagyis a vizsgált $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ mennyiség nem változik.

† Indoklás (az öf. esetre): Tfh. a behúzott e élgörbe az u és v csúcsokat köti össze. A már lerajzolt összefüggő síkgráfban van egy uv út; ez e-vel együtt egy gráfelméleti kört alkot, aminek egy $\mathcal{C}$ nem önátmetsző zárt görbe felel meg a szép lerajzolásban. Jordan–Schönflies-tétel ... Ha veszünk a síkon az e élgörbe két oldalán egy-egy közeli pontot, amelyek az e behúzása előtt még egy tartományba estek (abba, amelyikbe e-t rajzoltuk), akkor láthatjuk, hogy ez a két pont e behúzása után már különböző tartományba esik, mert $\mathcal{C}$ elválasztja őket. Innen már könnyű, hogy a tartományszám 1-gyel nő.

G összefüggő, szépen lerajzolt síkgráf $\Longrightarrow\ c - e + t = 2$.

1. A fáknak eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk; továbbá fák szép lerajzolásánál 1 tartomány keletkezik*, tehát kezdetben, a feszítőfa lerajzolásánál $\widetilde{e} = \widetilde{c} - 1$, és $\widetilde{t} = 1$, ezért $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t} = 2$.

2. Ha egy összefüggő síkgráf szép lerajzolásában két csúcsot összekötünk (élmetszés nélkül), akkor a berajzolt élgörbe egy korábbi tartományt két részre vág†, így az élszám is és a tartományszám is 1-gyel nő (a csúcsszám nem változik), vagyis a vizsgált $\widetilde{c} - \widetilde{e} + \widetilde{t}$ mennyiség nem változik.

3. Mivel egy feszítőfa lerajzolásával kezdtünk, a többi élgörbét mindig egy összefüggő gráf lerajzolásához adjuk hozzá. Tehát a lerajzolási folyamat során a $\widetilde{c}-\widetilde{e}+\widetilde{t}$ mindvégig 2 (kezdetben annyi, és utána nem változik), így a végső, bizonyítandó lerajzolásra is.

$\square$