

Polinom/polinom alakú hatványsorok együtthatói

Kombinatorika

6. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2016. március 8.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

$$\text{Ha } F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ akkor } F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

$$\text{Ha } F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ akkor } F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Állítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy az imént definiált műveletre is teljesülnek a hagyományos deriválásnál megszokott azonosságok, például $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

A „deriválási szabályok” megtalálhatók a formális hatványsoros segédanyagban.

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Emlékeztető: $G^k = \overbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}^{k\text{-szor}}$

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty/n} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg valójában véges, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_k G^k = 0$.

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg valójában véges, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_k G^k = 0$.

Megjegyzés. $[x^0]G \neq 0$ esetén nem definiáljuk $F \circ G$ -t.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow x \leftarrow 5x$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{3}x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n x^n$$

A számlálóból és a nevezőből is kiemeljük a konstans tagot, hogy

$\frac{1}{1-rx}$ alakú törtet kapjunk.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{3}x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n x^n$$

$$\frac{4}{5+2x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{5}x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}x\right)} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n$$

Így minden $\frac{p}{q+rx}$ alakú hatványsor együtthatóit meg tudjuk határozni.

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Lásd $\binom{n}{k}$ számok generátorfüggvénye.

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

1. bizonyítás: $\binom{2}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$. □

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

1. bizonyítás: $\binom{2}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$. □

2. bizonyítás: Végezzük el az

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots)$$

kéttényezős szorzást. □

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

3. bizonyítás: Ha deriváljuk az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

egyenlőség mindkét oldalát, akkor a bizonyítandót kapjuk. A bal oldalt mint hányadost deriváljuk:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1' \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{0 - (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad \square$$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

4. bizonyítás: Newton-formulával (lásd következő előadás):

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

mert

$$(-1)^n \binom{-2}{n} = (-1)^n \frac{(-2)(-3)(-4)\dots(-n-1)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$



$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtthatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{2}x\right)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtthatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{7}{2}x)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

Mi a helyzet általában az A/B alakú hatványsorokkal, ahol A és B polinomok?

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtt-
hatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{2}x\right)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \binom{3}{n} \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

Mi a helyzet általában az A/B alakú hatványsorokkal, ahol A és B polinomok?

Ha A -t maradékosan osztjuk B -vel (polinomosztással), akkor a

$$\frac{A}{B} = A_1 + \frac{A_2}{B}$$

alakhoz jutunk, ahol A_1 és A_2 polinomok, továbbá A_2 foka ki-
sebb, mint B foka. Ezért elég olyan polinom/polinom hatványsor-
okkal foglalkozni, amikor a számláló foka kisebb, mint a nevezőé.

Ha a nevező több tényező szorzata, akkor a racionális törtfüggvények integrálásánál látott módon „parciális törtekre bontunk”:

$$\begin{aligned}\frac{1 - 11x}{(1 + x)(1 - 2x)} &= \frac{4}{1 + x} - \frac{3}{1 - 2x} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 2^n) x^n.\end{aligned}$$

Ha a nevező több tényező szorzata, akkor a racionális törtfüggvények integrálásánál látott módon „parciális törtekre bontunk”:

$$\begin{aligned} \frac{1-11x}{(1+x)(1-2x)} &= \frac{4}{1+x} - \frac{3}{1-2x} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 2^n) x^n. \end{aligned}$$

$$\frac{3+x}{(-1+x)(1+x)(5+x)} = \frac{1/3}{-1+x} + \frac{-1/4}{1+x} + \frac{1/12}{5+x} = \dots$$

$$\frac{13+23x+16x^2+4x^3}{(1+x)^3(2+x)} = \frac{3}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{2+x} = \dots$$

$$\frac{16}{(-1+x)^2(1+x)^3} = \frac{-3}{-1+x} + \frac{2}{(-1+x)^2} + \frac{3}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{4}{(1+x)^3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1-11x}{(1+x)(1-2x)} &= \frac{4}{1+x} - \frac{3}{1-2x} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 2^n) x^n. \end{aligned}$$

$$\frac{3+x}{(-1+x)(1+x)(5+x)} = \frac{1/3}{-1+x} + \frac{-1/4}{1+x} + \frac{1/12}{5+x} = \dots$$

$$\frac{13+23x+16x^2+4x^3}{(1+x)^3(2+x)} = \frac{3}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{2+x} = \dots$$

$$\frac{16}{(-1+x)^2(1+x)^3} = \frac{-3}{-1+x} + \frac{2}{(-1+x)^2} + \frac{3}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{4}{(1+x)^3}.$$

Mivel polinom/polinom alakú formális hatványsorokkal ugyanúgy kell számolni, mint racionális törtfüggvényekkel, ezért a kalkulusból tanult parciális törtekre bontás tétele igaz polinom/polinom hatványsorokra is. (Az ott látott módszerrel el is tudjuk végezni a parciális törtekre bontást.)

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{r_{1,1}}{p_1 + q_1x} + \frac{r_{1,2}}{(p_1 + q_1x)^2} + \cdots + \frac{r_{1,d_1}}{(p_1 + q_1x)^{d_1}} + \\ &+ \frac{r_{2,1}}{p_2 + q_2x} + \frac{r_{2,2}}{(p_2 + q_2x)^2} + \cdots + \frac{r_{2,d_2}}{(p_2 + q_2x)^{d_2}} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{r_{k,1}}{p_k + q_kx} + \frac{r_{k,2}}{(p_k + q_kx)^2} + \cdots + \frac{r_{k,d_k}}{(p_k + q_kx)^{d_k}}. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

Ebben a prezentációban egy polinom fokán mindig a hagyományos értelemben vett fokszámát értjük, nem a formális hatványsoroknál bevezetett (kezdő)fokot.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $< B$ foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

1. megjegyzés: Az $\frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}$ parciális törtek együtthatóit a korábbiak alapján ki tudjuk számolni, így A/B együtthatóit is.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

1. megjegyzés: Az $\frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}$ parciális törtek együtthatóit a korábbiak alapján ki tudjuk számolni, így A/B együtthatóit is.

2. megjegyzés: A tételben szereplő $r_{i,j}$ számok egyértelműen meghatározottak.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

3. megjegyzés: A B tényezőire vonatkozó feltétel úgy is megfogalmazható, hogy további tényezőket már nem lehet „összevonni” a nevezőben.

Például $\frac{1}{(3-4x)(6-8x)}$ -re most $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(3-4x)^2}$ -ként kell tekinteni.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $< B$ foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

4. megjegyzés: Ha a komplex számtest felett dolgozunk (és a tételben \mathbb{R} -et \mathbb{C} -re cseréljük), akkor az algebra alaptétele szerint B **mindig** lineáris tényezők szorzatára bomlik. \mathbb{R} felett sajnos nem ez a helyzet, így amíg nem ismerjük a komplex számokat, ez a módszer nem mindig alkalmazható, csak bizonyos B -kre.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

4. megjegyzés:

$$\frac{3 + x}{1 - 2x + 2x^2} = ?$$

Komplex számok nélkül itt elakadtunk. :(

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1x)^{d_1}(p_2 + q_2x)^{d_2} \cdots (p_k + q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_ix)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_jx)$ -nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_ix)^j}.$$

4. megjegyzés:

$$\frac{3+x}{1-2x+2x^2} = \frac{3/2-2i}{1-(1+i)x} + \frac{3/2+2i}{1-(1-i)x} = \dots$$

Komplex számok körébe kilépve nem, mert ott a nevező szorzattá alakítható: $1-2x+2x^2 = (1-(1+i)x)(1-(1-i)x)$.