A Fibonacci-számok zárt alakja

Emlékeztető. Az $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-sorozatot az $F_0 = F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$) lineáris rekurzióval definiáltuk.

Állítás. *A fenti lineáris rekurzió megoldása, vagyis a Fibonacci-számok zárt alakja:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Bizonyítás.

1. lépés: *Meghatározzuk a sorozat generátorfüggvényét.*

Legyen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Az

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \dots \\ -xF(x) &= \quad - F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - \dots \\ -x^2F(x) &= \qquad\quad - F_0x^2 - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - \dots \end{aligned}$$

formális hatványsorokat összeadva az

$$(1 - x - x^2)F(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x$$

összefüggést kapjuk, mert az összeadás után a jobb oldalon a legalább másodfokú tagok együtthatóira az $F_n - F_{n-1} - F_{n-2}$ értékek adódnak ($n = 2, 3, 4, \dots$), melyek a definiáló rekurzió szerint 0-val egyenlők. Az $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$ kezdőértékek behelyettesítése után

$$(1 - x - x^2)F(x) = 1$$

adódik, ami a formális hatványsorok hányadosának definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

2. lépés: *Parciális törtekre bontjuk a kapott hányadost.*

2/a. *Először elsőfokú polinomok szorzatára bontjuk a nevezőt.* (A komplex számtest felett ilyen szorzatra bontás mindig *létezik*. Legalább ötödfokú nevező esetén azonban problémákba ütközhetünk, ha ezt meg is szeretnénk *találni*.)

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right).$$

Megjegyezzük, hogy ez a szorzattá alakítás kicsit „trükkös”. Másodfokú polinomok szorzattá alakításának a mechanikus módja az, hogy kiszámoljuk a gyököket megoldóképlettel, és felírjuk a gyöktényezős alakot (ami annak felel meg, hogy az első lépésben a „standard” módon alakítjuk teljes négyzetté a polinomot), amiből most a $(-1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + x\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x\right)$ szorzattá alakításhoz jutnánk. Ebből a szorzattá alakításból kiindulva természetesen ugyanúgy végigvihető lenne a generátorfüggvény együtthatóinak meghatározása, csak egy kicsit több számolással. Az általunk választott „nem standard” teljes négyzetre hozás után rögtön olyan szorzat alakban kaptuk meg a nevezőt, ami kényelmes lesz a továbbiakban (a tényezőkben a konstans tag 1). Másodrendű lineáris rekurziók megoldásakor mindig ez a fajta szorzattá alakítás jár a legkevesebb munkával.

2/b. *Meghatározzuk a parciális törtek számlálóit.* Keressük azokat az α, β számokat, amelyekre

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{\alpha}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\beta}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha közös nevezőre hozás után a számlálók megegyeznek,

$$\alpha\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) + \beta\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) = 1,$$

azaz az $[x^0]$ és $[x^1]$ együtthatókat összehasonlítva, ha α-ra és β-ra teljesül, hogy

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ -\alpha\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \beta\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 0. \end{cases}$$

Az első egyenlet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-szeresét hozzáadva a másodikhoz ..., az egyenletrendszer megoldása $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, amiből

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

3. lépés: *Leolvassuk az együtthatókat.*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Tehát

$$F_n = [x^n]F = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \qquad \square$$