Fibonacci-számok és Catalan-számok

Kombinatorika

7. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2016. március 16-17.

Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

„Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.”

Példák ilyen feltételekre:

$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{99}^2$.

$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13$.

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. (itt $n \geq 2$)

$a_n =$ „az n-edik tizedesjegye $\sin a_{n-1}$-nek”. (itt $n \geq 1$)

Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés" ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

„Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre."

Példák ilyen feltételekre:

$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{99}^2$.

$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13$.

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. (itt $n \geq 2$)

$a_n =$ „az n-edik tizedesjegye $\sin a_{n-1}$-nek". (itt $n \geq 1$)

A jobb oldalnak nem kell az összes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ elemtől ténylegesen függnie („úgy is függhet, hogy nem függ"). Sőt, pl. az $a_7 = 100$ feltétel is megengedett, ami egyáltalán nem „hivatkozik" más elemekre. (Az a_0 elemhez tartozó feltétel mindig ilyen.)

Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés" ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

(Egy ilyen feltételrendszert rekurziónak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket".

Például legyen a feltételrendszer a következő:

$a_0 = 1;$

$a_n = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2$, ha $n \geq 1$.

Világos, hogy ezt egyetlen sorozat elégíti ki:

$1, 1, 2, 6, 42, 1806, \dots$

Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés" ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

(Egy ilyen feltételrendszert rekurziónak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket".

Az így kapott $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot a fenti rekurzióval definiált sorozatnak szokás nevezni.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

Láttunk már ilyet:

1. példa: Ha s_n jelöli az $[n]$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az 'n' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű" változatát kell megoldani: hogy az $[n-1]$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_0 = s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

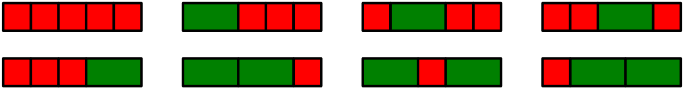
Láttunk már ilyet:

1. példa: Ha s_n jelöli az $[n]$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az 'n' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű" változatát kell megoldani: hogy az $[n-1]$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_0 = s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

Megjegyzés. Több paraméter esetén az ilyen visszavezetések többparaméteres rekurziókhoz vezetnek (nem nehéz kitalálni, h. ez mit jelent, csak azt kell tisztázni, hogy mit értünk korábbi elemeken): Lásd pl. rekurzió az $i(n, k)$ számokra.

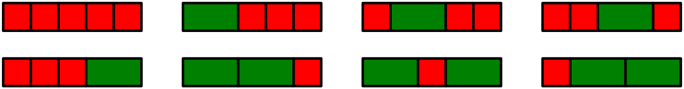
2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

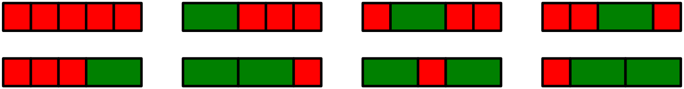
Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



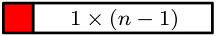
Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1-es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-1)$-es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2-es dominót teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-2)$-es téglalapot kell leparkettázni:

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

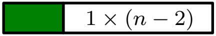
Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1-es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-1)$-es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2-es dominót teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-2)$-es téglalapot kell leparkettázni:



vagy



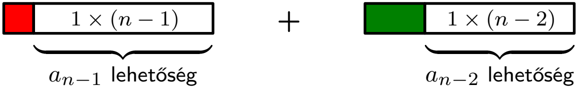
Tehát ha tudjuk, hogy az $1\times(n-1)$-es és $1\times(n-2)$-es téglalapokat hányféleképpen lehet leparkettázni, akkor egyszerű megválaszolni a kérdést az $1\times n$-es téglalapra is.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{(ha } n \geq 2\text{)},$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:

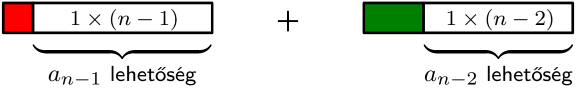


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{(ha } n \geq 2\text{)},$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:



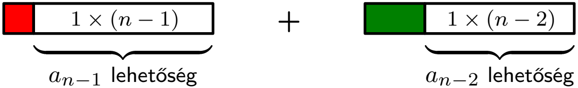
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is).

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:



Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is). a_0 jelentése nem teljesen világos. De ahhoz, hogy a_2 értékét helyesen adja meg a fenti gondolatmenet ($a_2 = 2$), az a_0-t 1-nek KELL tekinteni.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:

Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is).

Tehát F_n-féleképpen lehet leparkettázni az $1\times n$-es téglalapot, ahol F_n az n-edik Fibonacci-szám. $\square$

Érdemes külön kiemelni a kapott eredményt:

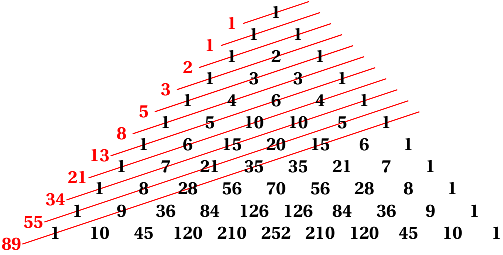
Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

Érdemes külön kiemelni a kapott eredményt:

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

Egy alkalmazás (nem vizsgaanyag).

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n.$$



Kép forrása: Wikipedia

Érdemes külön kiemelni a kapott eredményt:

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

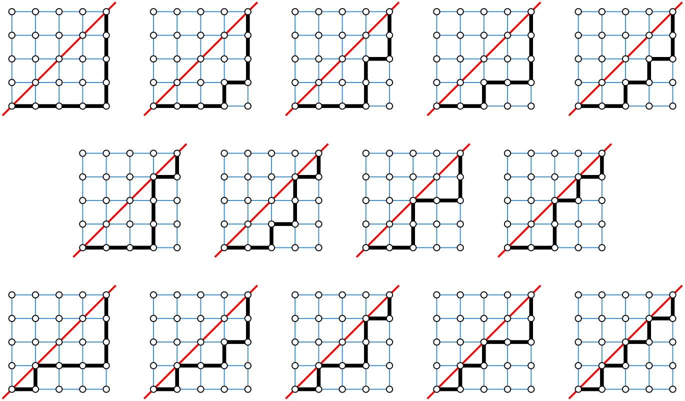
Egy alkalmazás (nem vizsgaanyag).

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $1\times n$-es téglalap (tételbeli) parkettázásait számolja meg. A bal oldal az 1×2-es parketták száma szerint osztályoz: $\binom{n-k}{k}$ azon parkettázások száma, amelyekben k darab 1×2-es parketta van (és $n-2k$ darab 1×1-es). $\square$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Például $n = 4$ esetén 14 ilyen út van:



3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n. Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n. Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

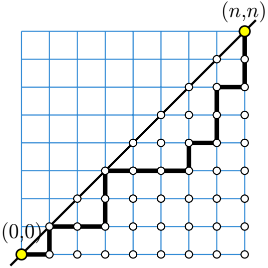
$C_0 = 1$ nyilvánvaló, mert $n = 0$ esetén a kezdőpont megegyezik a végcéllal, így egyetlen „eljutási lehetőség” van: ha nem lépünk egyet sem.

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n. Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámolandó „útnak” a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).

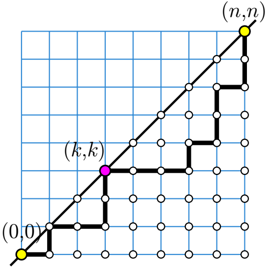


3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n. Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámolandó „útnak" a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).



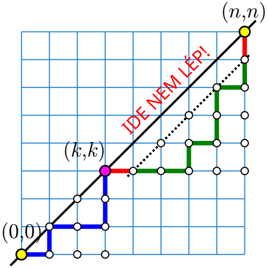
$C_k C_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek utoljára az átlóra a végpont előtt $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$:

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n. Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámolandó „útnak” a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).



$C_k C_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek utoljára az átlóra a végpont előtt $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$:

A $(0,0) \rightsquigarrow (k,k)$ szakaszra C_k lehetőség van;

az ábrán pirossal jelölt két lépés fix;

a $(k+1, k) \rightsquigarrow (n, n-1)$ szakaszra C_{n-1-k} leh. van.

$\square$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0 C_0 = 1$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0 C_0 = 1$
$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0C_0 = 1$
$C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2$
$C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 5$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0 C_0 = 1$
$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$
$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$
$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0C_0 = 1$
$C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2$
$C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 5$
$C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 14$
$C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 42 \quad \ldots$

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

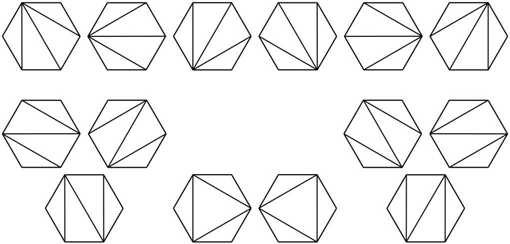
Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

$n = 4$

$C_4 = 14$



Kép: Wikipedia

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

2. Egy $(n+1)$-tényezős szorzatot C_n-féleképpen lehet zárójelezni.

Például $n = 3$ esetén az $abcd$ szorzatnak $C_3 = 5$ zárójelezése van:

$$((ab)c)d, \;\; (a(bc))d, \;\; (ab)(cd), \;\; a((bc)d), \;\; a(b(cd)).$$

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

2. Egy $(n+1)$-tényezős szorzatot C_n-féleképpen lehet zárójelezni.

3.* Az $[n]$ halmaznak C_n darab olyan sorbaállítása van, amelyben nincs 3 hosszú monoton növekvő részsorozat.

Például $n = 4$ esetén $C_4 = 14$ ilyen sorbaállítás van:

$$1432, 2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241,$$
$$3412, 3421, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.$$

Tétel. (A Catalan-számok zárt alakja.)

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Tétel. (A Catalan-számok zárt alakja.)

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

A tételt a Catalan-számok generátorfüggvényének meghatározásával fogjuk bizonyítani. Ehhez szükségünk lesz a formális hatványsorok tört kitevőjű hatványainak értelmezésére.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Emlékeztető: $X^n = \overbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}^{n\text{-szer}}$

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$-fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1)-szeresei. $\sqrt[n]{F}$-fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$-fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1)-szeresei. $\sqrt[n]{F}$-fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.

Megjegyzés. Az állítást nem bizonyítjuk. Az osztásnál látottakhoz hasonlóan a keresett $X = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x^k$ hatványsor együtthatói $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sorrendben haladva meghatározhatók (páros n esetén két megoldás lesz, amelyek egymás ellentettjei).

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$

$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m .$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$
$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m .$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Ez most csak egy jelölés, amely egy aritmetikai műveletekkel definiált valós számot takar. (Természetesen $\alpha \in \mathbb{N}$ esetén megkapjuk a hagyományos binomiális együttható értékét, de egyéb esetekben nincs közvetlen kombinatorikus jelentése.)

Végül megjegyezzük, hogy $\binom{\alpha}{0} = 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$
$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m.$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk a binomiális tételt).

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk a binomiális tételt).

2. A Newton-formulában x helyére beírható olyan G hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$:

$$(1+G)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} G^k.$$

(A jobb oldalt a kompozíciónál látott módon értelmezzük.)

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

3. Az előzőekből levezethető az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok generátorfüggvénye:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k.$$