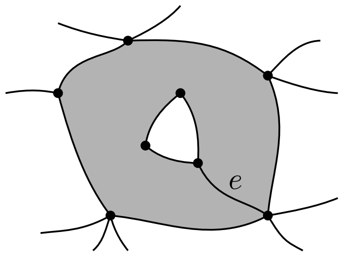
## Az Euler-formula következményei

**Állítás.** Tetszőleges $G$ *egyszerű* síkgráfra $|E(G)| < 3|V(G)|$.

Bizonyítás. Elegendő összefüggő gráfokra igazolni az állítást. (Mert ebből nem összefüggő gráfokra is következik a bizonyítandó: a komponensekre külön-külön felírva, majd összeadva az egyenlőtlenségeket.) Tehát feltesszük, hogy $G$ összefüggő. Ezenkívül a $|V(G)| \geq 3$ feltételezéssel is élünk. (A legfeljebb két pontú egyszerű gráfokra triviálisan teljesül az állítás.)

Vegyük $G$ egy szép lerajzolását. Egy $\mathcal{T}$ tartomány *oldalszámán* a tartományt határoló $G$-beli élek számát értjük, azzal a megállapodással, hogy azokat az éleket kétszer számoljuk, amelyek mindkét oldalán $\mathcal{T}$ fekszik. (Tehát például az ábrán látható szürke tartomány oldalszáma 10, mert az $e$ él kétszer számít bele.) Egy $\mathcal{T}$ tartomány oldalszámát a továbbiakban $o(\mathcal{T})$-vel jelöljük.




Minden tartománynak legalább 3 oldala van, ugyanis a legfeljebb kétoldalú tartományok a következők lehetnének: Egy hurokél által körbekerített 1 oldalú tartomány (de $G$-ben nincs hurokél), két párhuzamos él által közrezárt 2 oldalú tartomány (de $G$-ben nincsenek párhuzamos élek). Illetve van még egy patologikus eshetőség: Ha a $G$ gráfnak csak 0 vagy 1 éle van, akkor egyetlen tartomány alakul ki, amely rendre 0 vagy 2 oldalú (de ez sem fordulhat elő, mert feltettük, hogy $G$ legalább 3 pontú, és így az összefüggőség miatt legalább 2 élű).

Jelölje $G$ csúcsszámát $c$, élszámát $e$, a tartományok számát pedig $t$. Könnyű látni, hogy a tartományok oldalszámainak $\sum_{\mathcal{T}} o(\mathcal{T})$ összege éppen az élek számának kétszerese, mivel minden él pontosan két tartományt határol. (Ha csak egyet, akkor pedig az oldalszám definíciójában szereplő megállapodás miatt számoljuk kétszer az élt.) Az előbb meggondoltuk, hogy $o(\mathcal{T}) \geq 3$ minden $\mathcal{T}$ tartományra, így

$$2e = \sum_{\mathcal{T}} o(\mathcal{T}) \geq 3t.$$

Mivel $G$ összefüggő, az Euler-formula alapján

$$c - e + t = 2,$$

amelyből a fenti $t \leq \frac{2}{3}e$ egyenlőtlenség behelyettesítése és rendezés után a bizonyítandó $e \leq 3c - 6 < 3c$ adódik. □

**Következmény.** Minden *egyszerű* síkgráfnak van legfeljebb ötödfokú pontja.

Bizonyítás. Ha minden pont foka legalább 6 lenne, akkor a fokszámösszeg legalább $6|V|$ lenne, vagyis az élszám (ami a fokszámösszeg fele) legalább $3|V|$ lenne, és ez ellentmondana az előző állításnak. □

* * *

Érdemes kiemelni a fenti bizonyításból kiolvasható erősebb állítást (amit csak összefüggő gráfokra láttunk be, de könnyen meggondolható, hogy nem összefüggő gráfokra is igaz):

**Lemma.** Minden legalább 3 pontú, egyszerű $G$ síkgráfra $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

**Következmény.** $K_5$ nem síkgráf.

Bizonyítás. A lemma alapján egy 5 pontú egyszerű síkgráfnak csak legfeljebb $3 \cdot 5 - 6 = 9$ éle lehet, de $K_5$-nek 10 éle van. □