

Sorbaállítások, átrendezések (permutációk)

Kombinatorika

3. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2025. február 25.

Definíció. Egy H véges halmaz **sorbaállításán** egy olyan H elemeiből álló **sorozatot** értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Definíció. Egy H véges halmaz **sorbaállításán** egy olyan H elemeiből álló **sorozatot** értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

a, b, c a, c, b b, a, c b, c, a c, a, b c, b, a

Definíció. Egy H véges halmaz **sorbaállításán** egy olyan H elemeiből álló **sorozat** értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

a, b, c a, c, b b, a, c b, c, a c, a, b c, b, a

Konvenció. A sorozatelemeket elválasztó vesszőket általában nem írjuk ki a sorbaállításokban:

abc acb bac bca cab cba

Definíció. Egy H véges halmaz **sorbaállításán** egy olyan H elemeiből álló **sorozatot** értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

a, b, c a, c, b b, a, c b, c, a c, a, b c, b, a

Megjegyzés. Egy n hosszú sorozatra tekinthetünk egy $[n]$ -en értelmezett függvényként. (Valójában ez a sorozatok formális definíciója: az i -edik sorozatelem nem más, mint az i pozitív egész számhoz rendelt függvényérték.)

$$d, b, e, a, c, f \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & b & e & a & c & f \end{array}$$

Ekvivalens def. Egy n elemű H halmaz **sorbaállítása** egy $[n] \rightarrow H$ bijekció.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).

Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \dots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n _ _ _ _ & & _ a_n _ _ _ & & _ _ a_n _ _ & & _ _ _ _ a_n \\
 \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & \text{alakúak} \\
 & & & & \dots & &
 \end{array}$$

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).

Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \dots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n _ _ _ _ & | & _ a_n _ _ _ & | & _ _ a_n _ _ & | & \dots & | & _ _ _ _ a_n \\
 \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & & & \text{alakúak}
 \end{array}$$

Így n osztályba soroltuk H sorbaállításait. Mindegyik osztályban $(n-1)!$ sorbaállítás van: Ugyanis azon sorbaállításokat, amelyekben az a_n elem a rögzített i -edik helyen áll, úgy kapjuk meg, hogy a maradék $n-1$ helyre (a **pozíciókba**) beírjuk az $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ halmaz tetszőleges sorbaállítását; és az indukciós feltevés szerint $(n-1)!$ sorbaállítása van az $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ halmaznak.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).

Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \dots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n _ _ _ _ & | & _ a_n _ _ _ & | & _ _ a_n _ _ & | & \dots & | & _ _ _ _ a_n \\
 \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & \text{alakúak} & & & & \text{alakúak}
 \end{array}$$

Így n osztályba soroltuk H sorbaállításait. Mindegyik osztályban $(n-1)!$ sorbaállítás van: Ugyanis azon sorbaállításokat, amelyekben az a_n elem a rögzített i -edik helyen áll, úgy kapjuk meg, hogy a maradék $n-1$ helyre (a $_$ pozíciókba) beírjuk az $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ halmaz tetszőleges sorbaállítását; és az indukciós feltevés szerint $(n-1)!$ sorbaállítása van az $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ halmaznak.

Tehát H sorbaállításainak száma $n \cdot (n-1)! = n!$, a bizonyítandó. $\square$

A következő formula megadja az $n!$ nagyságrendjét, amely a faktoriális függvény nagy értékeinek becslésekor, illetve határérték-számításkor is hasznos:

Stirling-formula.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Jelmagyarázat. A fenti tételben a $\sim$ jelölés azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

A következő formula megadja az $n!$ nagyságrendjét, amely a faktoriális függvény nagy értékeinek becslésekor, illetve határérték-számításkor is hasznos:

Stirling-formula.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Jelmagyarázat. A fenti tételben a $\sim$ jelölés azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Feladat. A Stirling-formula segítségével mutassuk meg, hogy

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Példa. A 3 és 5 elemek **nem** állnak inverzióban $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Példa. A 3 és 5 elemek **nem** állnak inverzióban $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Megjegyzés. Az inverzió fogalmat csak az $[n]$ alaphalmaz sorbaállításaira definiáltuk. Más **rendezett** alaphalmaz esetén is definiálható lenne.

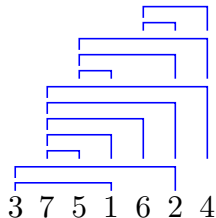
Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Definíció. A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás $\text{inv}(\pi)$ -vel jelölt **inverziószáma** a π -ben inverzióban álló $\{i, j\}$ elempárok száma.

Példa. A $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ sorbaállítás inverziószáma 12.



Jelölés. A $[n]$ halmaz sorbaállításainak halmazát $\mathfrak{S}_n$ -nel jelöljük.

Definíció. Legyen $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Azt mondjuk, hogy az i és j elemek (ahol $i, j \in [n]$, és $i \neq j$) **inverzióban állnak** π -ben, ha közülük a kisebbik később („jobbrább”) szerepel π -ben.

Példa. A 2 és 5 elemek inverzióban állnak $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ -ben.

Definíció. A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás $\text{inv}(\pi)$ -vel jelölt **inverziószáma** a π -ben inverzióban álló $\{i, j\}$ elempárok száma.

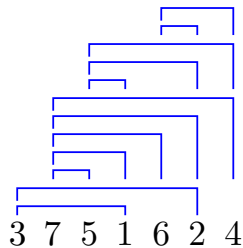
Példa. A $3751624 \in \mathfrak{S}_7$ sorbaállítás inverziószáma 12.

Megjegyzés. Tetszőleges $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás inverziószáma legfeljebb $\binom{n}{2}$ lehet, hiszen ennyi darab $\{i, j\}$ kételemű részhalmaza van $[n]$ -nek összesen, és ezek közül számol meg bizonyosakat az $\text{inv}(\pi)$. Tehát

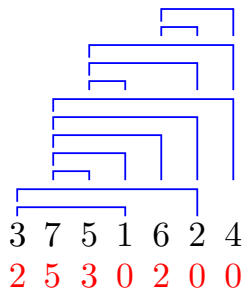
$$0 \leq \text{inv}(\pi) \leq \binom{n}{2}$$

minden $\pi \in \mathfrak{S}_n$ -re.

Az inverziószám gyors kiszámítása



Az inverziószám gyors kiszámítása



A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás minden elemére felírjuk, hogy tőle jobbra hány nála kisebb elem áll (azaz hogy hány olyan inverziópár van π -ben, amelynek ő a bal oldali eleme), és az így kapott számokat összeadjuk. A fenti példára $\text{inv}(\pi) = 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 12$.

Az inverziószám gyors kiszámítása

3	7	5	1	6	2	4
2	5	3	0	2	0	0

A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás minden elemére felírjuk, hogy tőle jobbra hány nála kisebb elem áll (azaz hogy hány olyan inverziópár van π -ben, amelynek ő a bal oldali eleme), és az így kapott számokat összeadjuk. A fenti példára $\text{inv}(\pi) = 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 12$.

Az inverziószám gyors kiszámítása

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás minden elemére felírjuk, hogy tőle jobbra hány nála kisebb elem áll (azaz hogy hány olyan inverziópár van π -ben, amelynek ő a bal oldali eleme), és az így kapott számokat összeadjuk. A fenti példára $\text{inv}(\pi) = 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 12$.

Definíció. A $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállításhoz ily módon rendelt „piros” számsorozatot (szám- n -est) a π **inverziótáblájának** nevezzük. Vagyis a $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás inverziótáblája az az $(s_1, \dots, s_n)$ szám- n -es, ahol s_i a π i -edik helyen álló elemétől jobbra álló, nála kisebb elemek száma π -ben.

Definíció. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k . Vagyis

$$i(n, k) := \left| \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n : \text{inv}(\pi) = k \right\} \right|.$$

Definíció. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k . Vagyis

$$i(n, k) := \left| \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n : \text{inv}(\pi) = k \right\} \right|.$$

Megjegyzés. Az $i(n, k)$ számoknak nincs szép zárt alakja.

Definíció. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k . Vagyis

$$i(n, k) := \left| \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n : \text{inv}(\pi) = k \right\} \right|.$$

Megjegyzés. Az $i(n, k)$ számoknak nincs szép zárt alakja.

Rekurzió az $i(n, k)$ számokra. Tetszőleges $n \geq 2$ és $k \geq 0$ esetén

$$i(n, k) = i(n-1, k) + i(n-1, k-1) + i(n-1, k-2) + \cdots + i(n-1, k-n+1),$$

ahol a jobb oldalon $i(n-1, t) = 0$, ha $t < 0$.

A fenti rekurzió segítségével rekurzívan kiszámolható az $i(n, k)$ pontos értéke az $i(1, 0) = 1$, ill. $i(1, 1) = i(1, 2) = i(1, 3) = i(1, 4) = \cdots = 0$ kezdőértékekből.

Definíció. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k . Vagyis

$$i(n, k) := \left| \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n : \text{inv}(\pi) = k \right\} \right|.$$

Megjegyzés. Az $i(n, k)$ számoknak nincs szép zárt alakja.

Rekurzió az $i(n, k)$ számokra. Tetszőleges $n \geq 2$ és $k \geq 0$ esetén

$$i(n, k) = i(n-1, k) + i(n-1, k-1) + i(n-1, k-2) + \cdots + i(n-1, k-n+1),$$

ahol a jobb oldalon $i(n-1, t) = 0$, ha $t < 0$.

Bizonyítás. A jobb oldal is az $[n]$ halmaz k inverziószámú sorbaállításait számolja meg, aszerint osztályozva őket, hogy az n elem hányadik pozícióban áll: Az 1. tag azon sorbaállításokat számolja meg ezek közül, amelyekben az n elem az utolsó helyen áll, a 2. tag azokat számolja meg, amelyekben az n elem az utolsó előtti helyen áll ... (Miért?) $\square$

Emlékeztető. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k .

Emlékeztető. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k .

Az $i(n, k)$ számok generátorfüggvénye.

$$\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i(n, k) x^k = 1(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}).$$

Emlékeztető. $i(n, k)$ jelöli az $[n]$ halmaz azon sorbaállításainak számát, melyek inverziószáma k .

Az $i(n, k)$ számok generátorfüggvénye.

$$\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i(n, k) x^k = 1(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}).$$

1. bizonyítás. Az $i(n, k)$ számokra vonatkozó rekurzió ismeretében a bizonyítás (n szerinti indukcióval) egy egyszerű gyakorló feladat az érdeklődő hallgatók számára. □

Az $i(n, k)$ számok generátorfüggvénye.

$$\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i(n, k) x^k = 1(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}).$$

2. bizonyítás. Még jobban megvizsgáljuk a sorbaállítások inverziótábláját:

Lemma. Rögzítsük n -et. Legyen Φ az a leképezés, amely minden $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállításhoz hozzárendeli az inverziótábláját. Például (itt $n = 7$)

$$(3, 7, 5, 1, 6, 2, 4) \xrightarrow{\Phi} (2, 5, 3, 0, 2, 0, 0).$$

Ez a Φ leképezés egy **bijekció** $\mathfrak{S}_n$ és a

$\{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, n-2\} \times \{0, 1, \dots, n-3\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$
halmaz között.

2. bizonyítás. Még jobban megvizsgáljuk a sorbaállítások inverziótábláját:

Lemma. Rögzítsük n -et. Legyen Φ az a leképezés, amely minden $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállításhoz hozzárendeli az inverziótábláját. Például (itt $n = 7$)

$$(3, 7, 5, 1, 6, 2, 4) \xrightarrow{\Phi} (2, 5, 3, 0, 2, 0, 0).$$

Ez a Φ leképezés egy **bijekció** $\mathfrak{S}_n$ és a

$\{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, n-2\} \times \{0, 1, \dots, n-3\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$
halmaz között.

Bizonyításvázlat. 1. Könnyű meggondolni, hogy Φ valóban a megadott $\{0, 1, \dots, n-1\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$ halmazba képez.

2. Azt kell meggondolni, hogy a $\{0, 1, \dots, n-1\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$ halmaz tetszőleges eleméhez egyértelműen található egy $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sorbaállítás, amelynek ő az inverziótáblája. („Egyértelműen kitalálható π az inverziótáblájából. És ez a gondolatmenet működik minden potenciális inverziótáblára a halmazból.”)

Lemma.

$$(3, 7, 5, 1, 6, 2, 4) \xrightarrow{\Phi} (2, 5, 3, 0, 2, 0, 0).$$

Ez a Φ leképezés egy **bijekció** $\mathfrak{S}_n$ és a

$\{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, n-2\} \times \{0, 1, \dots, n-3\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$
halmaz között.

Emlékezzünk, hogy az inverziótáblából könnyen kiolvasható az inverziószám: π inverziószáma az inverziótáblájában szereplő elemek összege. Ebből és a lemmából következik, hogy a $[n]$ halmaz k inverziószámú sorbaállításainak $i(n, k)$ száma a $\{0, 1, \dots, n-1\} \times \dots \times \{0, 1\} \times \{0\}$ halmaz k koordinátaösszegű elemeinek számával egyezik meg. Ez a szám pedig épp az x^k együtthatója a jobb oldalon a szorzás elvégzése után (miért?), a tétel bizonyítása véget ért: $\square$

$$\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i(n, k) x^k = 1(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}).$$

Def. A H feletti M multihalmaz **sorbaállításán** egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló **sorozat**ot értünk, amelyben minden H -beli elem pontosan annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása M -ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:
 $baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcd bcaac, \quad \dots$

Def. A H feletti M multihalmaz **sorbaállításán** egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló **sorozatot** értünk, amelyben minden H -beli elem pontosan annyszor szerepel, amennyi a multiplicitása M -ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:
 $baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcd bcaac, \quad \dots$

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!}.$$

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaznak $\frac{9!}{3!2!3!1!}$ darab sorbaállítása van.

Def. A H feletti M multihalmaz **sorbaállításán** egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló **sorozatot** értünk, amelyben minden H -beli elem pontosan annyszor szerepel, amennyi a multiplicitása M -ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:
 $baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcd bcaac, \quad \dots$

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!}.$$

Biz. Ha megkülönböztetnénk M elemeit (például a fenti M multihalmaz helyett az $M^{\text{kül}} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1\}$ halmaz elemeit állítanánk sorba), akkor a számláló, $|M|!$ lenne a sorbaállítások száma. A megkülönböztetés megszüntetése (az „indexek törlése”) után így M minden megszámolandó sorbaállítását pontosan $(M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!)$ -szor számoltuk meg. $\square$

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!}.$$

Illusztráció.

$$M^{\text{kül}} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1\}$$

$$M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$$

$M^{\text{kül}}$ sorbaállításai

M sorbaállításai

$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 c_1 c_2 c_3 d_1 \rightsquigarrow$$

$$aaabbbcccd$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$b_2 c_1 a_2 d_1 a_1 a_3 c_3 b_1 c_2 \rightsquigarrow$$

$$bcadaacbc$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$d_1 c_3 c_2 c_1 b_2 b_1 a_3 a_2 a_1 \rightsquigarrow$$

$$dcccbbaaa$$

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!}.$$

$$M^{\text{kül}} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1\}$$

$$M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$$

$M^{\text{kül}}$ sorbaállításai

M sorbaállításai

$$b_* c_* a_* d_* a_* a_* c_* b_* c_* \rightsquigarrow bcadaacbc$$

Összesen $|M^{\text{kül}}|! = 9!$ sor van. A jobb oldali oszlopban az M multihalmaz sorbaállításai jelennek meg; **mindegyik** pontosan $3!2!3!1!$ -szor. Ugyanis M egy **tetszőleges** s sorbaállításának „ősei” pontosan azok a sorbaállításai $M^{\text{kül}}$ -nek, amelyeket úgy kapunk s -ből, hogy az a -k helyére tetszőlegesen szétosztjuk az a_1, a_2, a_3 elemeket valamilyen sorrendben (**ez $3!$ lehetőség**), a b -k helyére pedig a b_1, b_2 elemeket (**$\cdot 2!$ lehetőség**), és így tovább; ez összesen $3!2!3!1!$ ősz. $\square$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Példa.

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 &= \frac{3!}{3!0!0!}x^3 + \frac{3!}{0!3!0!}y^3 + \frac{3!}{0!0!3!}z^3 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y + \frac{3!}{2!0!1!}x^2z + \\ &+ \frac{3!}{1!2!0!}y^2x + \frac{3!}{0!2!1!}y^2z + \frac{3!}{1!0!2!}z^2x + \frac{3!}{0!1!2!}z^2y + \frac{3!}{1!1!1!}xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.\end{aligned}$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mind-egyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.)

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban” felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k -ra, ahol $i + j + k = n$, hiszen összesen n tényezőből áll a tag.

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban” felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k -ra, ahol $i + j + k = n$, hiszen összesen n tényezőtől áll a tag. Egy rögzített i, j, k kitevőhármásra pontosan annyi tagból fog $x^i y^j z^k$ adódni így, ahány olyan x , y és z „betűkből” álló n betűs „szó” van, amelyben i darab x , j darab y és k darab z szerepel. Ez a szám pedig $\frac{n!}{i!j!k!}$, ugyanis a keresett szavak éppen az i db x , j db y és k db z betű lehetséges sorbaállításai. Összevonás után adódik a tétel jobb oldala. $\square$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

A binomiális tétel és a trinomiális tétel közös általánosítása a következő:

Polinomiális (vagy multinomiális) tétel.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_d=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}.$$

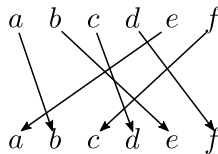
Bizonyítás. Hasonlóan adódik.



Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

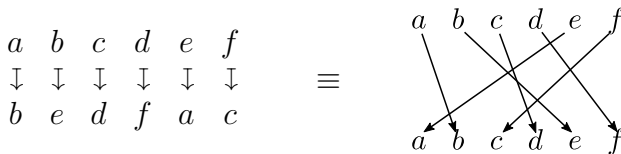
Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

a	b	c	d	e	f
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
b	e	d	f	a	c

 $\equiv$ 

Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:



Megj. $[n]$ átrendezése tehát egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekció. Az 1. dia 'Ekvivalens def.' pontja alapján egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekciót lehet $[n]$ sorbaállításként is „olvasni”:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2
 \end{array}
 \equiv 361452.$$

Tehát $[n]$ sorbaállításai és átrendezései között valójában nincs különbség formálisan. Ezért nem meglepő a következő:

Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

Megj. $[n]$ átrendezése tehát egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekció. Az 1. dia 'Ekvivalens def.' pontja alapján egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekciót lehet $[n]$ sorbaállításként is „olvasni”:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \equiv 361452.$$

Tehát $[n]$ sorbaállításai és átrendezései között valójában nincs különbség formálisan. Ezért nem meglepő a következő:

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

Megj. $[n]$ átrendezése tehát egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekció. Az 1. dia 'Ekvivalens def.' pontja alapján egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekciót lehet $[n]$ sorbaállításként is „olvasni”:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \equiv 361452.$$

Tehát $[n]$ sorbaállításai és átrendezései között valójában nincs különbség formálisan. Ezért nem meglepő a következő:

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

A következő (kicsit) általánosabb tételt fogjuk belátni:

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

Megjegyzés. $|A| \neq |B|$ esetén az $A \rightarrow B$ bijekciók száma 0.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_2 & b_5 & b_4 & b_6 & b_1 & b_3 \end{array}$$

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b_2	b_5	b_4	b_6	b_1	b_3

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b_2	b_5	b_4	b_6	b_1	b_3

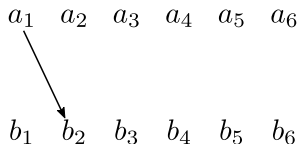
És mivel az n elemű $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van, a bizonyítandót kapjuk. $\square$

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

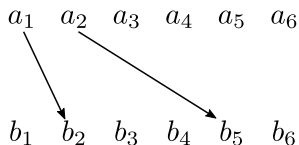
2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.

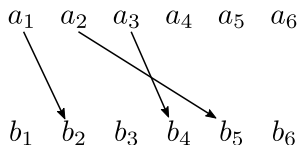


Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

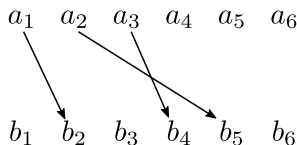
Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n - 2)$ -féleképp választhatjuk meg ...

És így tovább, ez összesen $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n - 2)$ -féleképp választhatjuk meg ... És így tovább, ez összesen $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Ezzel látszólag az $A \rightarrow B$ injektív fgveket számoltuk meg, de $|A| = |B| = n$ miatt egy $A \rightarrow B$ injektív fgv automatikusan szürjektív is, tehát bijektív.

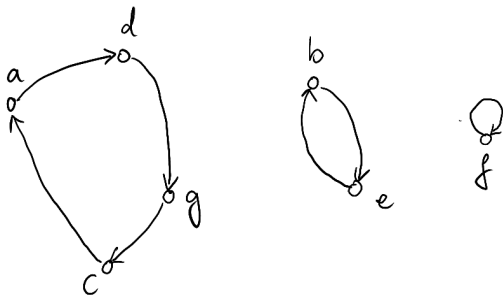
Definíció. Egy $\phi: H \rightarrow H$ permutáció **diagramján** a következő ábrát értjük:

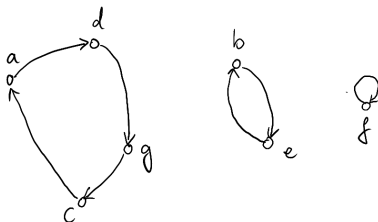
- H minden elemére felveszünk egy karikát (és megcímkezzük az elemmel).
- Minden $h \in H$ elemhez húzunk egy nyilat a h -hoz tartozó karikából a $\phi(h)$ -hoz tartozó karikába.

Példa. A $H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ halmaz

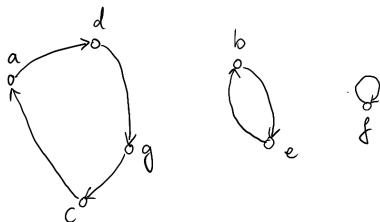
$$a \mapsto d, \quad b \mapsto e, \quad c \mapsto a, \quad d \mapsto g, \quad e \mapsto b, \quad f \mapsto f, \quad g \mapsto c$$

átrendezésének diagramja:





Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.

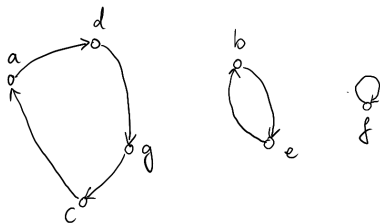


Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.

Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \dots, r_\ell\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (ℓ hosszú) **ciklusát** alkotják, ha

$$\phi(r_1) = r_2, \quad \phi(r_2) = r_3, \quad \phi(r_3) = r_4, \quad \dots, \quad \phi(r_{\ell-1}) = r_\ell, \quad \phi(r_\ell) = r_1.$$

A $\phi|_{\{r_1, \dots, r_\ell\}}$ leképezés (ϕ megszorítása az $\{r_1, \dots, r_\ell\}$ halmazra) ϕ egy **ciklusa**.



Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.

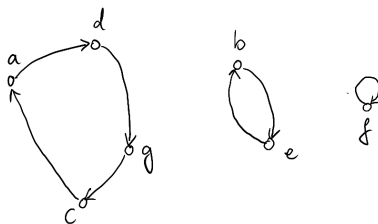
Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \dots, r_\ell\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (ℓ hosszú) **ciklusát** alkotják, ha

$$\phi(r_1) = r_2, \quad \phi(r_2) = r_3, \quad \phi(r_3) = r_4, \quad \dots, \quad \phi(r_{\ell-1}) = r_\ell, \quad \phi(r_\ell) = r_1.$$

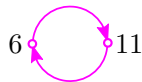
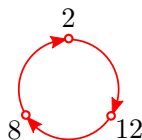
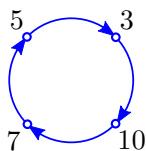
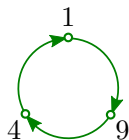
A $\phi|_{\{r_1, \dots, r_\ell\}}$ leképezés (ϕ megszorítása az $\{r_1, \dots, r_\ell\}$ halmazra) ϕ egy **ciklusa**.

Példa. A fenti permutációban az $\{a, d, g, c\}$ elemek egy 4 hosszú ciklust, a $\{b, e\}$ elemek egy 2 hosszú ciklust, az $\{f\}$ elem egy 1 hosszú(!) ciklust alkotnak.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

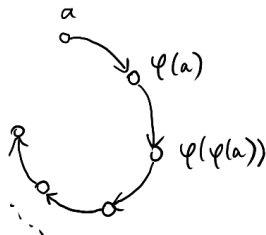
A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



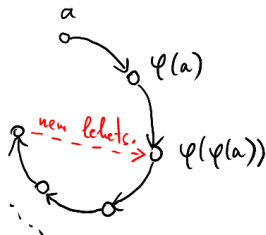
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



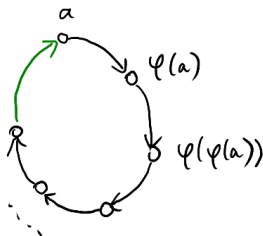
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



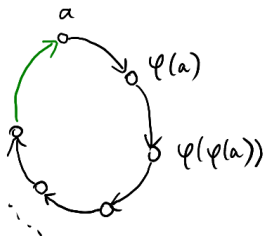
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



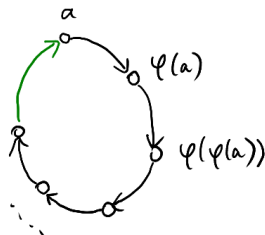
Ezzel egy ciklust találtunk (a ciklusát)! Legyen ez a ciklus C . Ha C tartalmazza H összes elemét, akkor készen vagyunk. (Tfh nem.) Mivel C minden karikájába már megy be is és ki is 1-1 nyíl, így más nyilak nem illeszkednek C elemeire. Ebből következik, hogy ϕ megszorítása $(H \setminus C)$ -re a $H \setminus C$ egy permutációja lesz.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



Folytassuk a ciklusok keresését a C -n kívüli részben: Egy tetszőleges C -n kívüli a' elemből indulva kövessük a nyilakat $\dots$. Az előző gondolatmenet szerint ezek ismét egy „ciklussá záródnak be”. És így tovább, megkapjuk ϕ keresett ciklusokra bontását. (Alaphalmaz elemszáma szerinti indukcióval lehet a leírást tömören befejezni.) $\square$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható egy algoritmus, amellyel egy permutáció ciklusait megtalálhatjuk.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható egy algoritmus, amellyel egy permutáció ciklusait megtalálhatjuk.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható egy algoritmus, amellyel egy permutáció ciklusait megtalálhatjuk.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Ne felejtsük el, hogy az algebristáktól eltérően mi az 1 hosszú ciklusokat is mindig figyelembe vesszük!

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Ne felejtsük el, hogy az algebristáktól eltérően mi az 1 hosszú ciklusokat is mindig figyelembe vesszük!

Állítás.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n - 1)!$$

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Ne felejtsük el, hogy az algebristáktól eltérően mi az 1 hosszú ciklusokat is mindig figyelembe vesszük!

Állítás.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

Tétel*.

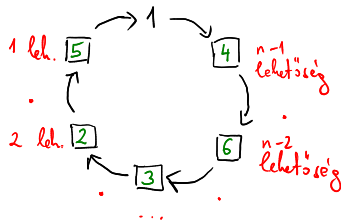
$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Bizonyítás. Egy elegáns bizonyítás (ciklusszínezett permutációk összeszámlálásával) olvasható a honlapon. □

Állítás. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a $[n]$ halmaznak $(n-1)!$ darab olyan ϕ átrendezése van, amely 1 ciklusból áll (azaz az egész átrendezés maga egy ciklus):

- $\phi(1)$, vagyis az '1' elem képe $(n-1)$ -féleképpen választható meg (az '1' nem lehet a kép, mert akkor túl korán bezáródna az '1' elem ciklusa);
- $\phi(\phi(1))$, vagyis az '1' elem képének a képe $(n-2)$ -féleképpen választható meg (ez a kép nem lehet sem 1, sem $\phi(1)$);
- és így tovább, ez összesen $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$ lehetőség. $\square$



A bizonyítás úgy is összefoglalható, hogy pontosan annyi 1-ciklusú permutáció van, ahányféle sorrendben a $2, 3, 4, \dots, n$ elemeket szét lehet osztani a négyzetekbe. (Miért?)

Állítás. Egy rögzített H halmaz átrendezései a kompozíció („összetett függvény képzés”) művelettel **csoportot** alkotnak, ld. Diszkrét matematika kurzus.

Állítás. Egy rögzített H halmaz átrendezései a kompozíció („összetett függvény képzés”) művelettel csoportot alkotnak, ld. Diszkrét matematika kurzus.

Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát/csoportját S_n -nel jelöljük.

Állítás. Egy rögzített H halmaz átrendezései a kompozíció („összetett függvény képzés”) művelettel **csoportot** alkotnak, ld. Diszkrét matematika kurzus.

Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát/csoportját S_n -nel jelöljük.

S_n egy elemére gondolhatunk átrendezésként és sorbaállításként is ($\mathfrak{S}_n \approx S_n$):

$$\mathfrak{S}_6 \ni 361452 \equiv \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \in S_6.$$

Állítás. Egy rögzített H halmaz átrendezései a kompozíció („összetett függvény képzés”) művelettel **csoportot** alkotnak, ld. Diszkrét matematika kurzus.

Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát/csoportját S_n -nel jelöljük.

S_n egy elemére gondolhatunk átrendezésként és sorbaállításként is ($\mathfrak{S}_n \approx S_n$):

$$\mathfrak{S}_6 \ni 361452 \equiv \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \in S_6.$$

Definíció. A $\pi \in S_n$ permutáció **páros**, ha az inverziószáma (mint sorbaállítás) páros; illetve π **páratlan**, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A fenti példában szereplő $361452 \in S_6$ sorbaállítás/átrendezés inverziószáma 8, tehát ez a permutáció páros.

Állítás. Egy rögzített H halmaz átrendezései a kompozíció („összetett függvény képzés”) művelettel **csoportot** alkotnak, ld. Diszkrét matematika kurzus.

Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát/csoportját S_n -nel jelöljük.

S_n egy elemére gondolhatunk átrendezésként és sorbaállításként is ($\mathfrak{S}_n \approx S_n$):

$$\mathfrak{S}_6 \ni 361452 \equiv \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \in S_6.$$

Definíció. A $\pi \in S_n$ permutáció **páros**, ha az inverziószáma (mint sorbaállítás) páros; illetve π **páratlan**, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A fenti példában szereplő $361452 \in S_6$ sorbaállítás/átrendezés inverziószáma 8, tehát ez a permutáció páros.

Tétel. Az imént definiált páros/páratlan permutáció fogalom egybeesik a Diszkrét mat. kurzuson definiált páros/páratlan permutáció fogalommal.

Tétel. Az imént definiált páros/páratlan permutáció fogalom egybeesik a Diszkrét mat. kurzuson definiált páros/páratlan permutáció fogalommal.

Részletesebben:

Tétel. Legyen $\pi \in S_n$ egy permutáció. A következők ekvivalensek:

- π mint sorbaállítás inverziószáma **páros** (azaz π páros a mi definíciónk szerint).
- π mint átrendezés előáll **páros** sok transzpozíció szorzataként (azaz π páros permutáció a Diszkrét matematika kurzus definíciója szerint).
- π minden transzpozíciók szorzatára való bontása **páros** sok tényezőből áll (másszóval, π nem áll elő páratlan sok transzpozíció szorzataként).

Nem bizonyítjuk. A holnapon a 'Permutációk paritása' segédanyagban elolvasható a bizonyítás, további részletekkel együtt.

Tétel. Az imént definiált páros/páratlan permutáció fogalom egybeesik a Diszkrét mat. kurzuson definiált páros/páratlan permutáció fogalommal.

Részletesebben:

Tétel. Legyen $\pi \in S_n$ egy permutáció. A következők ekvivalensek:

- π mint sorbaállítás inverziószáma **páratlan** (azaz π páratlan a mi definíciónk szerint).
- π mint átrendezés előáll **páratlan** sok transzpozíció szorzataként (azaz π páratlan permutáció a Diszkrét matematika kurzus definíciója szerint).
- π minden transzpozíciók szorzatára való bontása **páratlan** sok tényezőből áll (másszóval, π nem áll elő páros sok transzpozíció szorzataként).

Nem bizonyítjuk. A holnapon a 'Permutációk paritása' segédanyagban elolvasható a bizonyítás, további részletekkel együtt.