

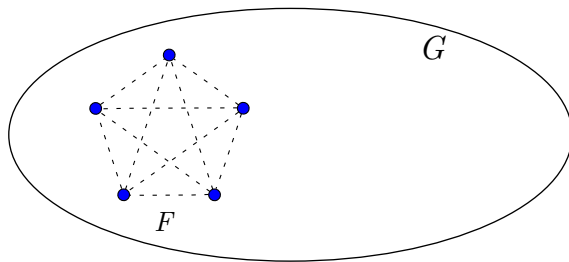
Páros gráfok, kromatikus szám

Kombinatorika

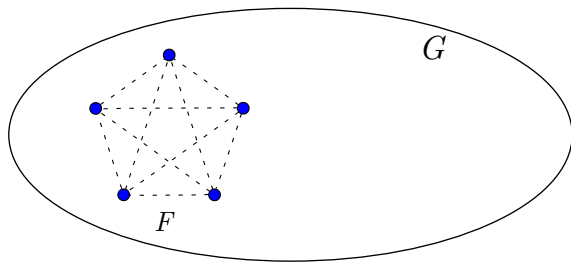
11. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2025. május 6.

Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz **független ponthalmaz**, ha F semelyik két pontja között nem halad él G -ben (és hurokél sem illeszkedik F -beli pontra).



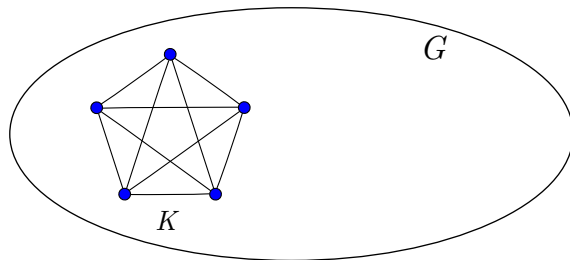
Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz **független ponthalmaz**, ha F semelyik két pontja között nem halad él G -ben (és hurokél sem illeszkedik F -beli pontra).



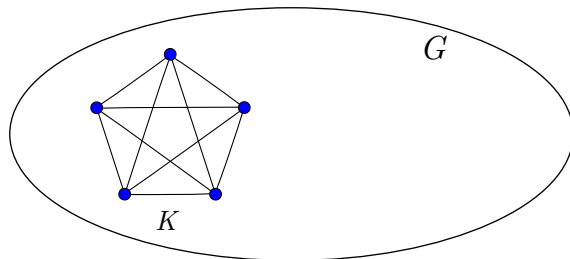
Definíció. A G gráfban található legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ -vel jelöljük:

$$\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.



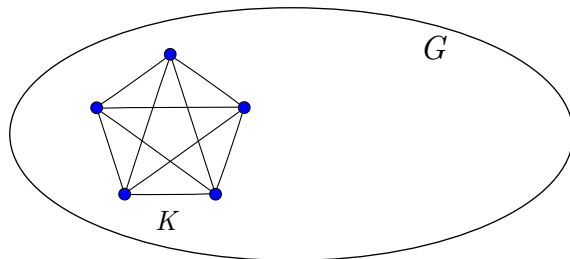
Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.



Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$ -vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.

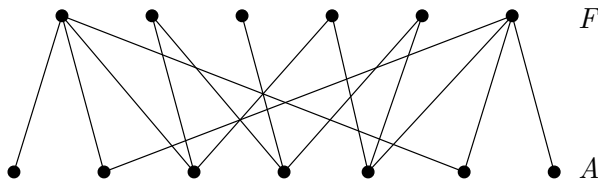


Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$ -vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

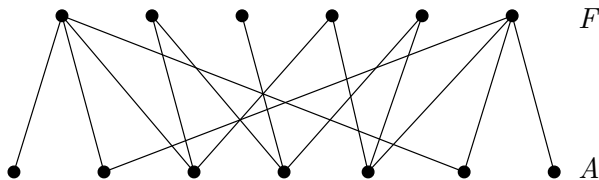
Megjegyzés. Sem az $\alpha(G)$, sem az $\omega(G)$ paraméter kiszámítására nem ismert „gyors” algoritmus (és a sejtés szerint nincs is).

Páros gráfok (ismétlés).



Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Páros gráfok (ismétlés).

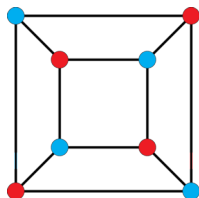


Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Észrevétel. Ha G egy tetszőleges páros gráf A és F osztályokkal, akkor az A -beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az F -beli csúcsok fokszámaival összegével. És mindkét fokszámösszeg a gráf éleinek számával egyenlő.

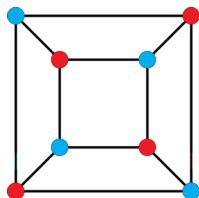
Emlékeztető. Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)



Emlékeztető. Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)

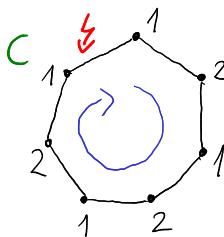


Ekvivalens def. Egy gráf **páros**, ha csúcsai kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy minden él két végpontja különböző színű.

T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Bizonyítás. 1. Ha a G gráfban van egy C páratlan kör, akkor biztos, hogy nem tudjuk a csúcsait a kívánt módon pirossal és kékkel színezni, ugyanis C csúcsain váltakoznia kellene a két színnek C élei miatt, de ez a páratlan körhossz miatt nem lehetséges.



1 = piros
2 = kék

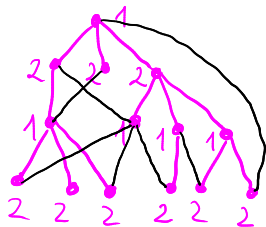
T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Bizonyítás. 2. A bizonyítás nehezebb része azt meggondolni, hogy ha a G gráfban nincs páratlan kör, akkor a csúcsait a kívánt módon pirossal és kékkel tudjuk színezni. Feltehető, hogy G összefüggő. (Ha nem az, akkor a páratlan körmentes összefüggő komponenseire csináljuk meg a most elmondottakat.)

T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Bizonyítás. 2. A bizonyítás nehezebb része azt meggondolni, hogy ha a G gráfban nincs páratlan kör, akkor a csúcsait a kívánt módon pirossal és kékkel tudjuk színezni. Feltehető, hogy G összefüggő. (Ha nem az, akkor a páratlan körmentes összefüggő komponenseire csináljuk meg a most elmondottakat.)

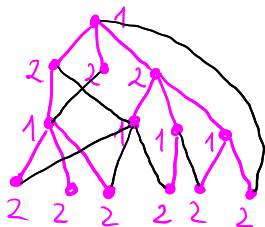
Tekintsük G egy F feszítőfáját. Ha csak F éleit tekintjük, akkor könnyű látni, hogy F -nek van „jó” piros-kék színezése (pl. gyökeres faként nézünk F -re, és szintenként felváltva színezzük a csúcsokat).



1 = piros
2 = kék

T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Bizonyítás.



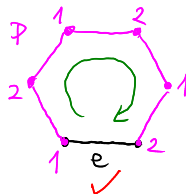
1 = piros
2 = fekete

Mivel F tartalmazza G összes csúcsát, valójában ezzel G csúcsait is kiszíneztük. Azt állítjuk, hogy ez a színezés „jó” lesz G -re is, vagyis G minden nem F -beli élének is különböző színű a két végpontja.

T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Mivel F tartalmazza G összes csúcsát, valójában ezzel G csúcsait is kiszíneztük. Azt állítjuk, hogy ez a színezés „jó” lesz G -re is, vagyis G minden nem F -beli élének is különböző színű a két végpontja.

Tekintsünk egy tetszőleges $e \in E(G) \setminus E(F)$ élt. Mivel F feszítőfa, F -ben létezik egy(etlen) P út az e él két végpontja között. Ez az út e -vel együtt egy kört ad G -ben, ami G páratlan-kör-mentessége miatt csak páros hosszú lehet. Tehát a P út páratlan hosszú. Így mivel F -et „jó” színeztük, ezért P -n váltakoznak a színek, vagyis P két végpontja különböző színt kapott.



1 = piros
2 = kék

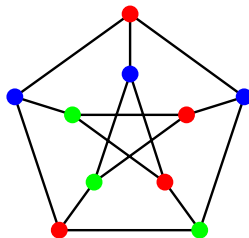


A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.



A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

Megj. Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre. Fontos optimalizálási probléma a felhasznált színek számának minimalizálása.

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k -színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k -színezhető $\iff \chi(G) \leq k$.

Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k -színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k -színezhető $\iff \chi(G) \leq k$.

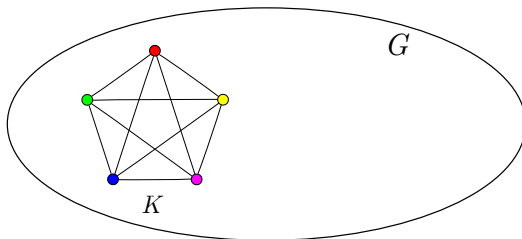
Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Megjegyzés. A kromatikus szám meghatározására nem ismert „hatékony” algoritmus, és a sejtés szerint nincs is. Sőt, már a 3-színezhetőség is nehéz kérdés: A $P \neq NP$ probléma egy újabb ekvivalens alakja (vö. Hamilton-körök), hogy létezik-e polinomidejű algoritmus annak eldöntésére, hogy egy gráf 3-színezhető-e. (A 2-színezhetőség eldöntése egyszerű. HF.)

Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

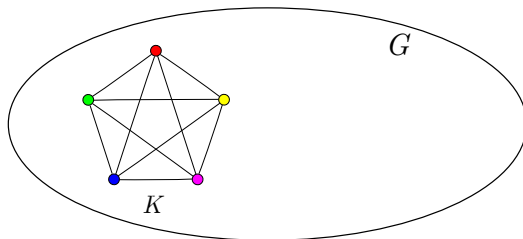
Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G -ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. $\square$



Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G -ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. $\square$



Megjegyzés. $\chi(G) > \omega(G)$ előfordulhat. Sőt:

Tétel. Tetszőleges (nagy) $k \geq 2$ számhoz létezik olyan G gráf, melynek kromatikus száma legalább k , de G -ben nincs háromszög, azaz $\omega(G) = 2$.

Tétel. Tetszőleges (nagy) $k \geq 2$ számhoz létezik olyan G gráf, melynek kromatikus száma legalább k , de G -ben nincs háromszög, azaz $\omega(G) = 2$.

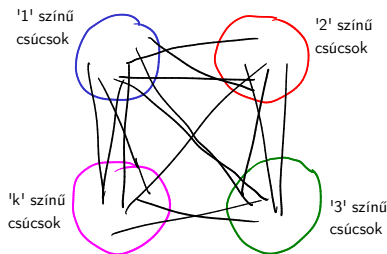
Feladat*. Legyen $\mathcal{G}_N$ az az egyszerű gráf, amelynek csúcsai az $\{1, \dots, N\}$ halmaz kételemű részhalmazai van (tehát $\binom{N}{2}$ csúcs van), és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha az egyik halmaz nagyobbik eleme megegyezik a másik halmaz kisebbik elemével. Például a $\{2, 5\}$ és $\{5, 9\}$ csúcsok összekötöttek, de az $\{1, 4\}$ és $\{2, 8\}$ nem, valamint a $\{2, 5\}$ és $\{2, 6\}$ sem. **Állítás:** $\mathcal{G}_N$ -ben nincs háromszög, és ha $N > 2^k$, akkor $\chi(\mathcal{G}_N) > k$.

Megjegyzés. További konstrukciók találhatóak a honlapon.

Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő osztályozása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)



Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő osztályozása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)

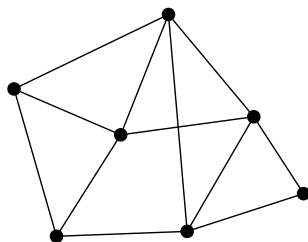
Színezzük jól G -t optimálisan, azaz $\chi(G)$ színnel. Ezzel G csúcshalmazát $\chi(G)$ darab független ponthalmazra osztályoztuk, és mindegyik osztály legfeljebb $\alpha(G)$ méretű (hiszen $\alpha(G)$ a legnagyobb „független ponthalmaz”-méret).

Az osztályméretekre vonatkozó felső becsléseket összeadva kapjuk, hogy

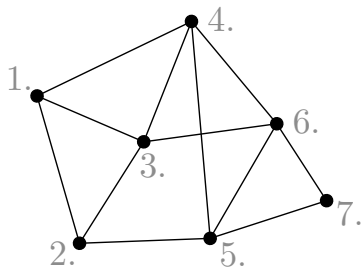
$$|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G),$$

ami rendezés után épp a bizonyítandó. □

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)

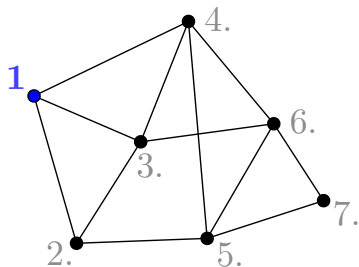


Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



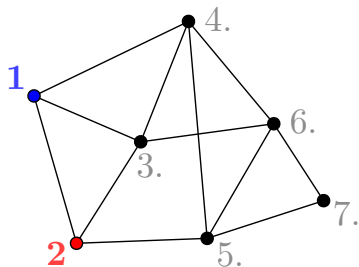
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



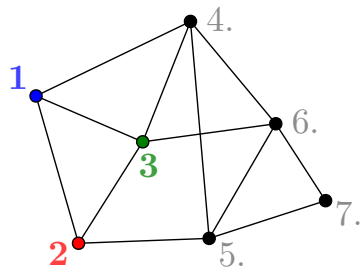
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



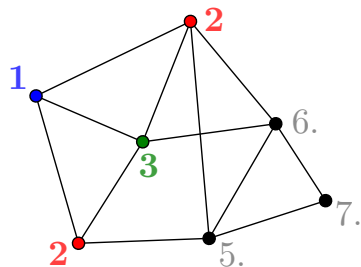
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



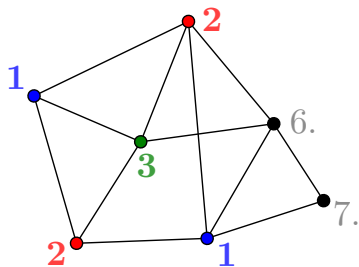
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



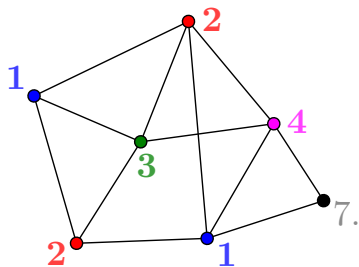
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



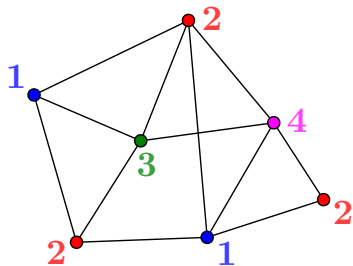
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



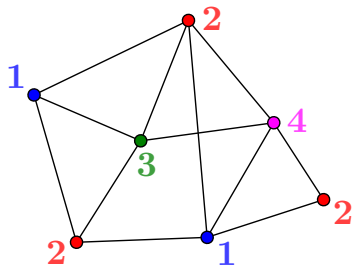
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)

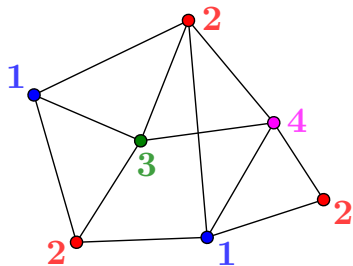


- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Állítás. Az algoritmus végén G egy jó színezését kapjuk.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $e \in E(G)$ élt. Az e él később színezett v végpontjának színezésekor figyeltünk arra, hogy más színt válasszunk, mint a korábban színezett u végpontjának színe (hiszen v színezésekor az u már színezett szomszédja v -nek). □

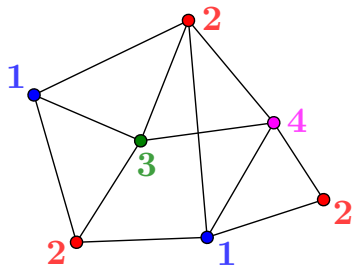
Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus végén kapott színezés – és így a felhasznált színek száma is – függ(het) az algoritmus első lépésében választott π csúcsszínezési sorrendtől!

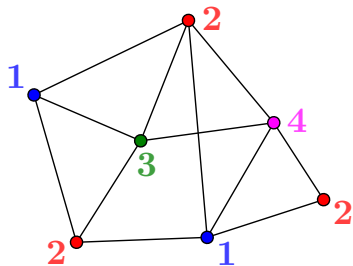
Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus nem biztos, hogy optimálisan színez, pl. az ábrán látható gráf 3 színnel is jól színezhető. A felhasznált színek száma csak egy felső becslés $\chi(G)$ -re: ennyi szín elég.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus nem biztos, hogy optimálisan színez, pl. az ábrán látható gráf 3 színnel is jól színezhető. A felhasznált színek száma csak egy felső becslés $\chi(G)$ -re: ennyi szín elég.

De. Minden G gráfhoz van olyan π csúcssorrend, amely szerint haladva a mohó színezés optimálisan, azaz $\chi(G)$ színt felhasználva színezi G -t. (Nem biz.)

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Biz. Színezzük jól mohó algoritmussal G csúcsait (tetszőleges π sorrend szerint haladva). Megmutatjuk, hogy minden csúcs az $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ halmazból kapott színt, vagyis hogy a kapott jó színezés legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színt használ:

- Egy tetszőleges v csúcsnak $d(v)$ darab szomszédja van, ezek közül bizonyosak színezettek v színezésekor. Így v színezésekor v már színezett szomszédainak száma legfeljebb $d(v)$, tehát legfeljebb $\Delta(G)$.
- Emiatt legfeljebb $\Delta(G)$ -féle különböző szín jelenik meg v szomszédain (még akkor is, ha mindegyik színezett szomszéd más színű).
- Így az $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$ színek közül legalább egy nem szerepel v már színezett szomszédain. Az algoritmus ezen „szabad” színek közül választja a legkisebbet v színének, tehát v színe valóban a mondott halmazból kerül ki. $\square$

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

A teljes gráfok és a páratlan körök esetén a fenti tételben egyenlőség áll fenn. (Miért?) Minden más összefüggő gráf esetén a tételbeli felső becslés javítható:

Brooks-tétel. Ha G egy olyan összefüggő gráf, amely nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Nem bizonyítjuk.

Észrevétel. Ha az R gráf részgráfja G -nek, akkor

$$\chi(R) \leq \chi(G).$$

Észrevétel. Ha a G gráf komponensei $G_1, G_2, \dots, G_k$, akkor

$$\chi(G) = \max_{i \in [k]} \chi(G_i).$$

Észrevétel. Ha G egyszerű gráf, akkor

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \text{ és } \omega(G) = \alpha(\overline{G}).$$