

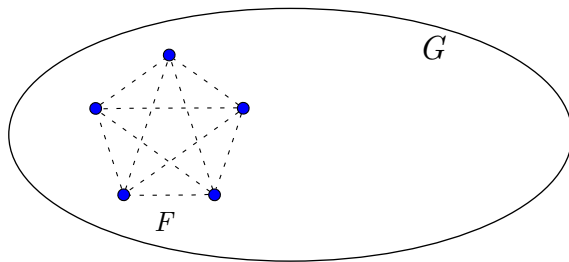
Páros gráfok, kromatikus szám

Kombinatorika

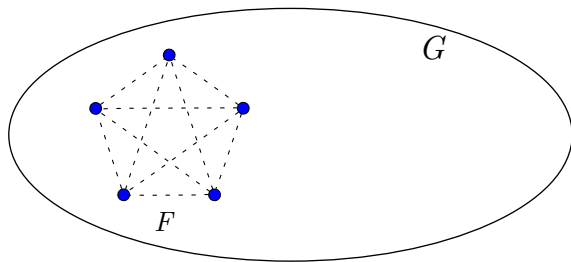
11. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2024. május 2.

Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz **független ponthalmaz**, ha F semelyik két pontja között nem halad él G -ben (és hurokél sem illeszkedik F -beli pontra).



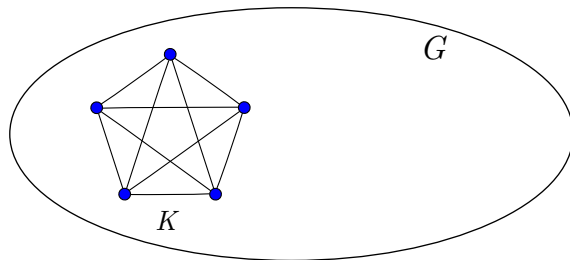
Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz **független ponthalmaz**, ha F semelyik két pontja között nem halad él G -ben (és hurokél sem illeszkedik F -beli pontra).



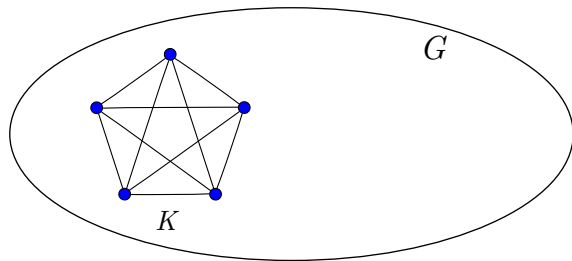
Definíció. A G gráfban található legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ -vel jelöljük:

$$\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.



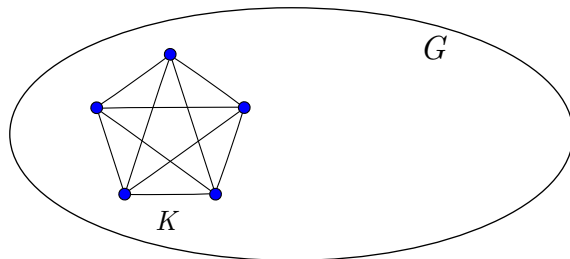
Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.



Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$ -vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz **klikk**, ha K bármely két pontja között halad él G -ben.

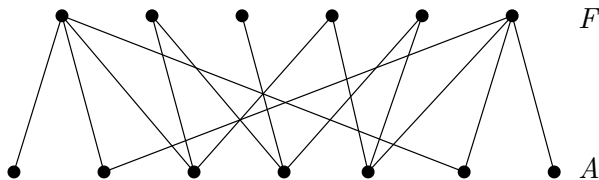


Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$ -vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

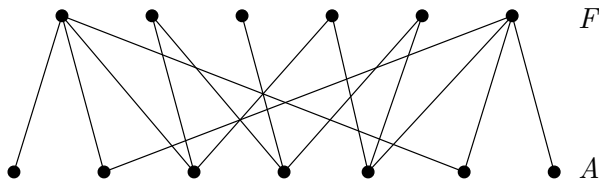
Megjegyzés. Sem az $\alpha(G)$, sem az $\omega(G)$ paraméter kiszámítására nem ismert „gyors” algoritmus (és a sejtés szerint nincs is).

Páros gráfok (ismétlés).



Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Páros gráfok (ismétlés).

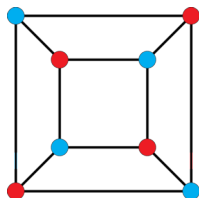


Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Észrevétel. Ha G egy tetszőleges páros gráf A és F osztályokkal, akkor az A -beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az F -beli csúcsok fokszámaival összegével. És mindkét fokszámösszeg a gráf éleinek számával egyenlő.

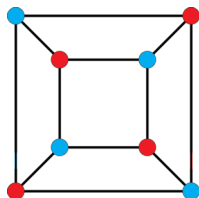
Emlékeztető. Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)



Emlékeztető. Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)



T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

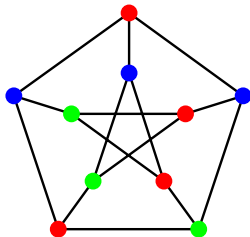
Bizonyítás. Lásd gyakorlat. (A nehezebb irány a 9. feladatsor 18. feladata.) $\square$

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.



A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$ -beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

Megj. Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre. Fontos optimalizálási probléma a felhasznált színek számának minimalizálása.

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k -színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k -színezhető $\iff \chi(G) \leq k$.

Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$ -vel jelölt **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G .

Tehát „ $\chi(G) = k$ ” KÉT dolgot jelent: G -nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G !

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k -színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k -színezhető $\iff \chi(G) \leq k$.

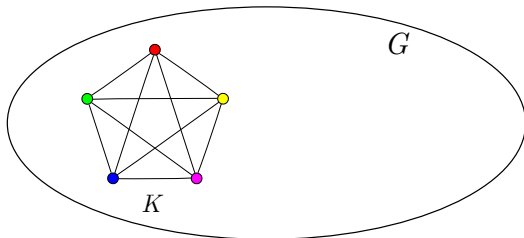
Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Megjegyzés. A kromatikus szám meghatározására nem ismert „hatékony” algoritmus, és a sejtés szerint nincs is. Sőt, már a 3-színezhetőség is nehéz kérdés: A $P \neq NP$ probléma egy újabb ekvivalens alakja (vö. Hamilton-körök), hogy létezik-e polinomidejű algoritmus annak eldöntésére, hogy egy gráf 3-színezhető-e. (A 2-színezhetőség eldöntése egyszerű. HF.)

Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

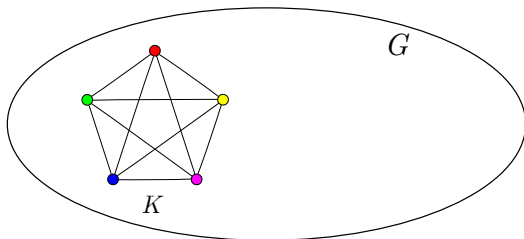
Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G -ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. $\square$



Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G -ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. $\square$



Megjegyzés. $\chi(G) > \omega(G)$ előfordulhat. Sőt:

Tétel. Tetszőleges (nagy) $k \geq 2$ számhoz létezik olyan G gráf, melynek kromatikus száma legalább k , de G -ben nincs háromszög, azaz $\omega(G) = 2$.

Tétel. Tetszőleges (nagy) $k \geq 2$ számhoz létezik olyan G gráf, melynek kromatikus száma legalább k , de G -ben nincs háromszög, azaz $\omega(G) = 2$.

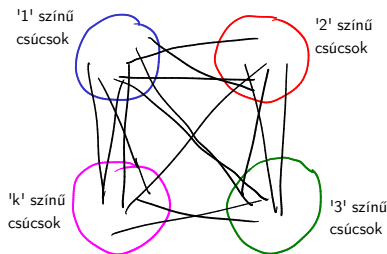
Feladat*. Legyen $\mathcal{G}_N$ az az egyszerű gráf, amelynek csúcsai az $\{1, \dots, N\}$ halmaz kételemű részhalmazai van (tehát $\binom{N}{2}$ csúcs van), és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha az egyik halmaz nagyobbik eleme megegyezik a másik halmaz kisebbik elemével. Például a $\{2, 5\}$ és $\{5, 9\}$ csúcsok összekötöttek, de az $\{1, 4\}$ és $\{2, 8\}$ nem, valamint a $\{2, 5\}$ és $\{2, 6\}$ sem. **Állítás:** $\mathcal{G}_N$ -ben nincs háromszög, és ha $N > 2^k$, akkor $\chi(\mathcal{G}_N) > k$.

Megjegyzés. További konstrukciók találhatóak a honlapon.

Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő osztályozása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)



Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő osztályozása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)

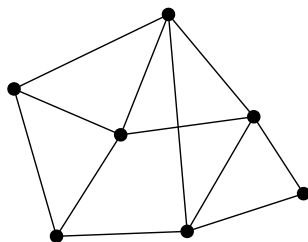
Színezzük jól G -t optimálisan, azaz $\chi(G)$ színnel. Ezzel G csúcshalmazát $\chi(G)$ darab független ponthalmazra osztályoztuk, és mindegyik osztály legfeljebb $\alpha(G)$ méretű (hiszen $\alpha(G)$ a legnagyobb „független ponthalmaz”-méret).

Az osztályméretekre vonatkozó felső becsléseket összeadva kapjuk, hogy

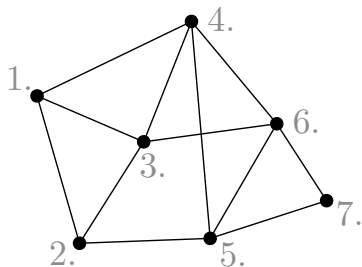
$$|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G),$$

ami rendezés után épp a bizonyítandó. □

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)

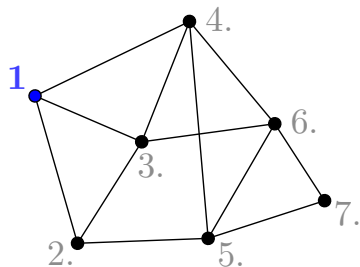


Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



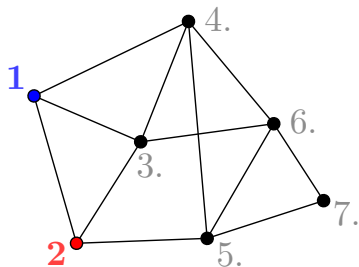
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



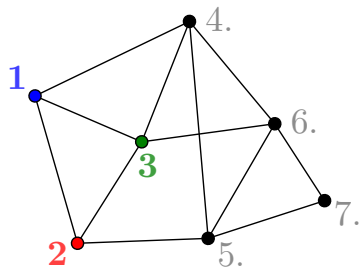
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



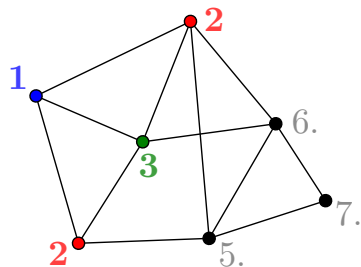
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



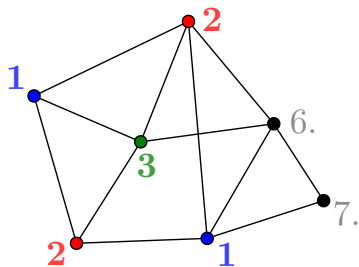
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



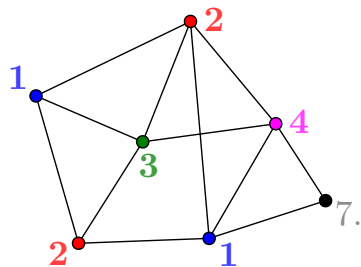
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



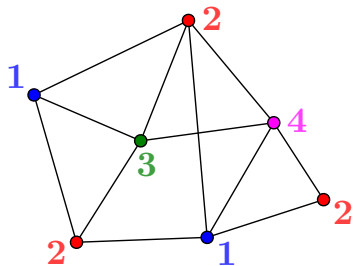
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



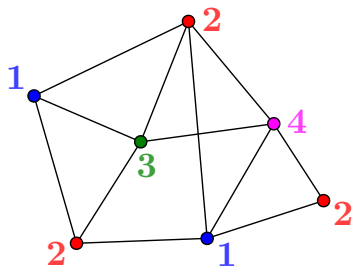
- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)

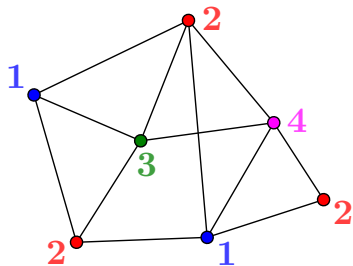


- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Állítás. Az algoritmus végén G egy jó színezését kapjuk.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $e \in E(G)$ élt. Az e él később színezett v végpontjának színezésekor figyeltünk arra, hogy más színt válasszunk, mint a korábban színezett u végpontjának színe (hiszen v színezésekor az u már színezett szomszédja v -nek). □

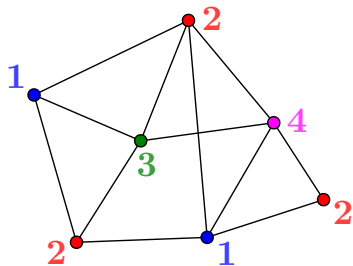
Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus végén kapott színezés – és így a felhasznált színek száma is – függ(het) az algoritmus első lépésében választott π csúcsszínezési sorrendtől!

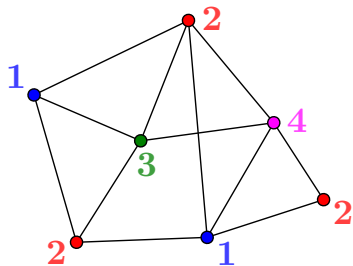
Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus nem biztos, hogy optimálisan színez, pl. az ábrán látható gráf 3 színnel is jól színezhető. A felhasznált színek száma csak egy felső becslés $\chi(G)$ -re: ennyi szín elég.

Mohó színezési algoritmus. Adott egy G egyszerű gráf, amelyet jól akarunk színezni. (A kiosztott színek pozitív egész számok lesznek.)



- Jelöljük ki G csúcsainak egy π sorrendjét. (Ld. szürke sorszámok az ábrán.)
- A π szerinti sorrendben haladva színezzük ki egymás után G csúcsait úgy, hogy a soron következő v csúcsnak kiosztjuk a legkisebb olyan pozitív egész számot színként, amely nem jelenik meg v már színezett szomszédain.

Megjegyzés. A mohó algoritmus nem biztos, hogy optimálisan színez, pl. az ábrán látható gráf 3 színnel is jól színezhető. A felhasznált színek száma csak egy felső becslés $\chi(G)$ -re: ennyi szín elég.

De. Minden G gráfhoz van olyan π csúcssorrend, amely szerint haladva a mohó színezés optimálisan, azaz $\chi(G)$ színt felhasználva színezi G -t. (Nem biz.)

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Biz. Színezzük jól mohó algoritmussal G csúcsait (tetszőleges π sorrend szerint haladva). Megmutatjuk, hogy minden csúcs az $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ halmazból kapott színt, vagyis hogy a kapott jó színezés legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színt használ:

- Egy tetszőleges v csúcsnak $d(v)$ darab szomszédja van, ezek közül bizonyosak színezettek v színezésekor. Így v színezésekor v már színezett szomszédainak száma legfeljebb $d(v)$, tehát legfeljebb $\Delta(G)$.
- Emiatt legfeljebb $\Delta(G)$ -féle különböző szín jelenik meg v szomszédain (még akkor is, ha mindegyik színezett szomszéd más színű).
- Így az $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$ színek közül legalább egy nem szerepel v már színezett szomszédain. Az algoritmus ezen „szabad” színek közül választja a legkisebbet v színének, tehát v színe valóban a mondott halmazból kerül ki. $\square$

A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$ -vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

A teljes gráfok és a páratlan körök esetén a fenti tételben egyenlőség áll fenn. (Miért?) Minden más összefüggő gráf esetén a tételbeli felső becslés javítható:

Brooks-tétel. Ha G egy olyan összefüggő gráf, amely nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Nem bizonyítjuk.