

Gráfelméleti alapok

Kombinatorika

6. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2024. április 4.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Emlékeztetünk, hogy $\binom{V}{2}$ a V kételemű részhalmazainak halmazát jelöli.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

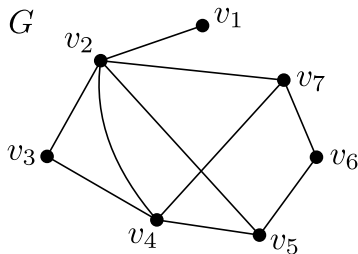
Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

$$E = \left\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\} \right\}.$$

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}\}$.

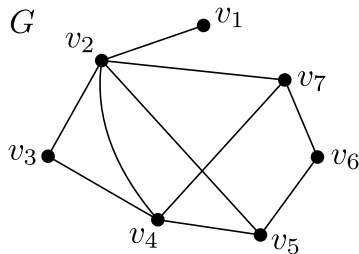
A példa szemléltetése.



Egyszerű gráf informálisan:

Véges sok csúcs (pont), bizonyos csúcspárok egy éllel összekötve.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

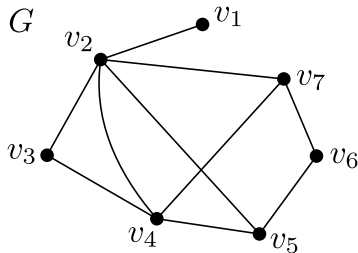


Jelölések. • Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a G gráf csúcshalmazáról, illetve élhalmazáról van szó, akkor $V(G)$ -t, illetve $E(G)$ -t írunk.

- Tehát $|V(G)|$ a G gráf csúcsszáma, $|E(G)|$ pedig az élszáma.
- Az $\{u, v\}$ élt (kételemű halmazt) az olvashatóság kedvéért uv alakban írjuk.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

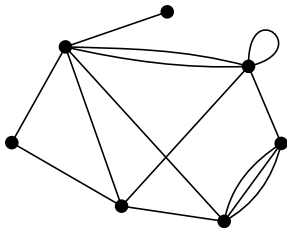
A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



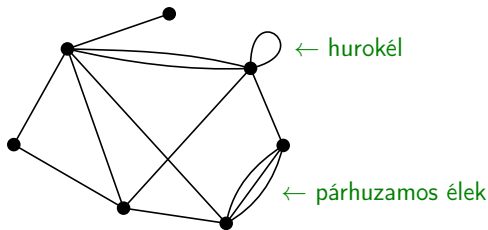
Konvenciók. • $uv \in E(G)$ esetén azt mondjuk, hogy „az u és v csúcsok összekötöttek / szomszédosak G -ben”.

• Élünk a gráf szemléletes jelentéséből adódó szóhasználat: „az uv él két végpontja u és v ”, „az $e = uv$ él illeszkedik az u csúcsra” stb.

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.

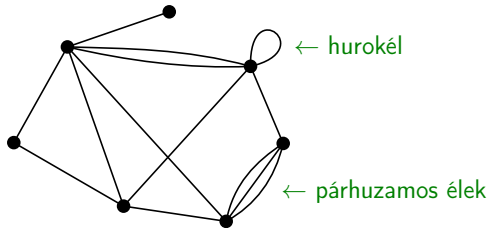


(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



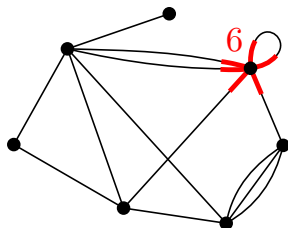
Általános gráfok esetén megengedett, hogy egy élnek egybeessen a két végpontja (az ilyen éleket **hurokéleknek** nevezzük), illetve két pont között egynél több él is haladhat (ez esetben ezen éleket **párhuzamos éleknek** vagy **többszörös élek** nevezzük).

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



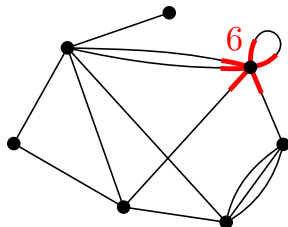
Megjegyzés. Az egyszerű gráfok tekinthetők általános gráfoknak is. (A szemléletes kép alapján ez nyilvánvaló. Formálisan, a (V, E) egyszerű gráfra tekinthetünk (V, E, I) gráfként, ahol az I illeszkedési reláció úgy van definiálva, hogy az $\{u, v\}$ él pontosan az u és v csúcsokra illeszkedik.) Egy gráf pontosan akkor egyszerű gráf, ha nem tartalmaz sem hurokért, sem párhuzamos éleket.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

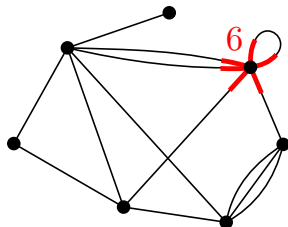
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (v\text{-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (v\text{-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Fokszám.

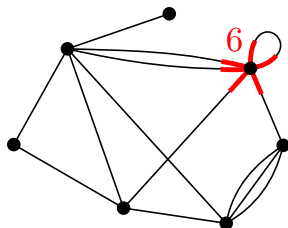


Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (\text{v-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (\text{v-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Megjegyzés. Egyszerű gráf esetén a v csúcs fokszáma a v szomszédainak száma.

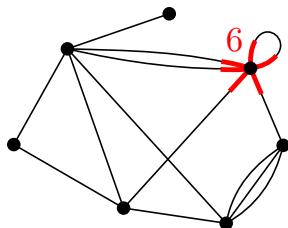
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Definíció. Egy gráf 0 fokú csúcsait **izolált csúcsoknak** nevezzük. •

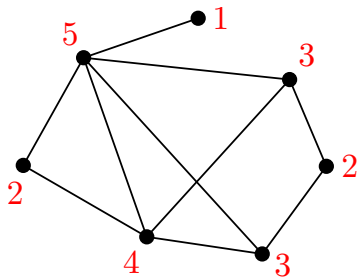
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

A gráfelmélet jelöléseinek gyakorlása kedvéért ugyanez formálisabban:

Tetszőleges G gráf esetén

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

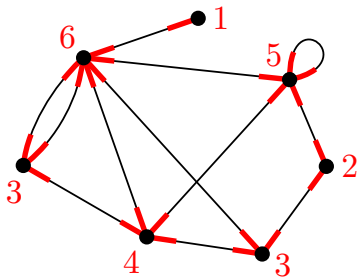
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

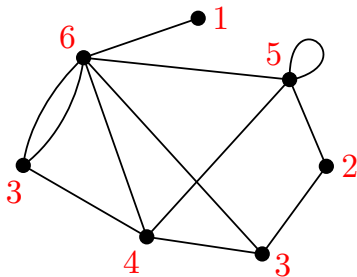


$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Bizonyítás. A fokszámösszeg is, és az élszám kétszerese is a gráfban található élvégeket számolja össze. (A fokszámösszeg csúcsonként csoportosítva számol; az élszámösszeg kétszerese pedig abból jön, hogy minden élnek két vége van.)



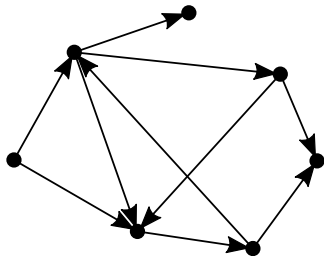
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



Következmény. Tetszőleges gráfban a fokszámok összege páros.

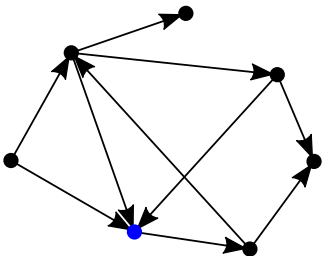
Másszóval. Tetszőleges gráfban páros sok páratlan fokszámú csúcs van.

Írányított gráf.



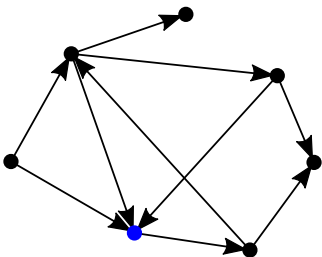
Az **írányított gráfokban** minden élnek van egy iránya. (Minden él az egyik végpontjából a másik felé mutat.) Informálisan, irányított gráfot úgy kapunk, hogy felveszünk egy irányítatlan (= „hagyományos”) gráfot, és minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A **precíz definíciót mellőzzük, az érdeklődő hallgató elolvashatja a fogalomtárban.**)

Megj. Ezen a kurzuson nem sokat foglalkozunk irányított gráfokkal. Amikor a továbbiakban „gráfot” írunk, akkor mindig „irányítatlan gráfra” gondolunk.



Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

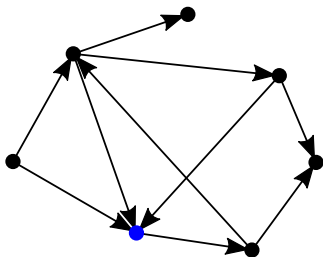
Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.



Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

Példa. A permutációk diagramja (ld. 3. előadás) egy olyan irányított gráf, amelyben minden csúcsnak 1 a befoka és a kifoka is.

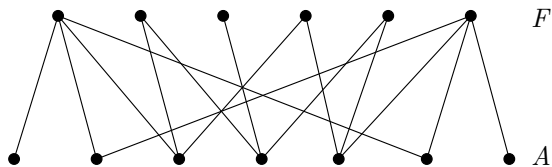


Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

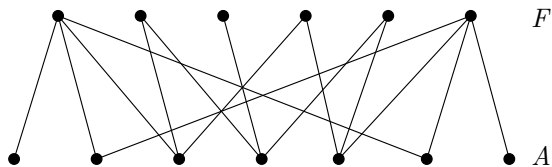
Tétel + Biz. Tetszőleges irányított gráfban a csúcsok kifokainak összege megegyezik a csúcsok befokainak összegével. Mindkét mennyiség az élek számával egyenlő.

Páros gráfok.



Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Páros gráfok.

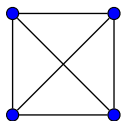
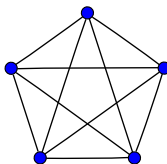
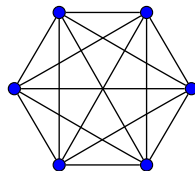


Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

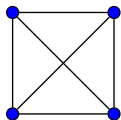
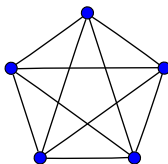
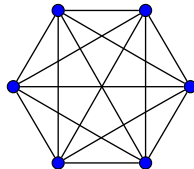
Észrevétel. Ha G egy tetszőleges páros gráf A és F osztályokkal, akkor az A -beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az F -beli csúcsok fokszámaival összegével. És mindkét fokszámösszeg a gráf éleinek számával egyenlő.

$$\sum_{v \in A} d(v) = \sum_{v \in F} d(v) = |E(G)|.$$

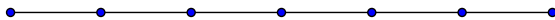
A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n -nel jelöljük.

 K_4  K_5  K_6

A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n -nel jelöljük.

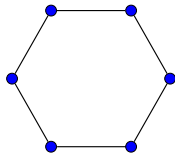
 K_4  K_5  K_6

Az **út-gráf** olyan egyszerű gráf, amely megkapható úgy, hogy felvesszünk egymás mellett néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha szomszédosak az ábrán. Az n élű út-gráfo(ka)t P_n -nel jelöljük.

 P_6

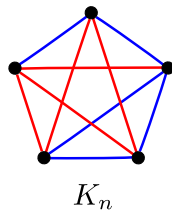
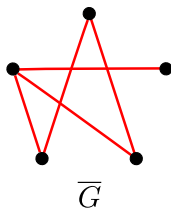
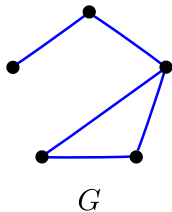
Formálisan: $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$, $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n+1}\}$.

A **kör-gráf** olyan gráf, amely megkapható úgy, hogy körszerűen felveszünk néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze a gráfban, ha szomszédosak a körön. Az n pontú kör gráfo(ka)t C_n -nel jelöljük.

 C_6  C_2  C_1

Fontos kiegészítés, hogy C_1 -et és C_2 -t az ábrán látható módon definiáljuk (így ezek nem egyszerű gráfok; míg a nagyobb pontszámú kör-gráfok egyszerűek).

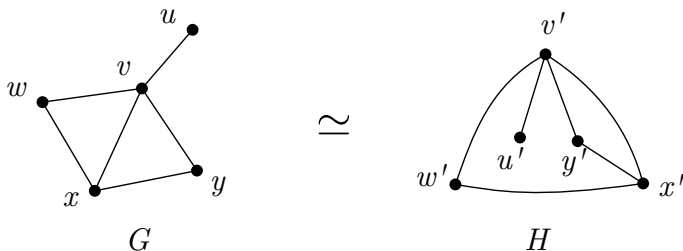
A G egyszerű gráf **komplementere** az a $\overline{G}$ -sal jelölt egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és két csúcspontosan akkor összekötött $\overline{G}$ -ben, ha azok nem összekötöttek G -ben.



Tehát ha G egy n pontú gráf, akkor $\overline{G}$ -t úgy kapjuk, hogy az n pontú teljes gráfból töröljük G éleit.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.



$$\phi: \quad u \mapsto u', \quad v \mapsto v', \quad w \mapsto w', \quad x \mapsto x', \quad y \mapsto y'.$$

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfhalmazon.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n , C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfhalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n , C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

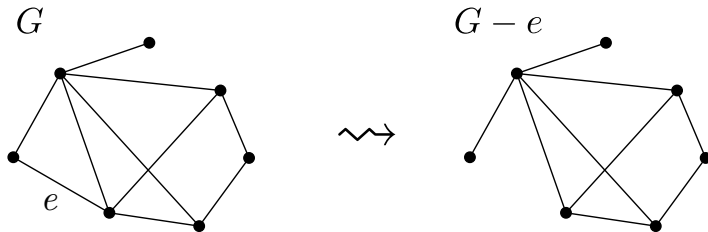
Megjegyzés. Általános gráfok izomorfíája ezek után értelemszerűen definiálható (a fenti világoskék magyarázatot formalizálva); ez az érdeklődő hallgatók számára egyszerű gyakorló feladat.

Azon, hogy a „ G gráfból elhagyjuk az e élt”, azt értjük, hogy töröljük G élhalmazából az $e \in E(G)$ élt. Az így kapott gráfot $G - e$ jelöli.

Precízebben:

$$V(G - e) := V(G), \quad E(G - e) := E(G) \setminus \{e\},$$

és a G -beli illeszkedések öröklődnek.



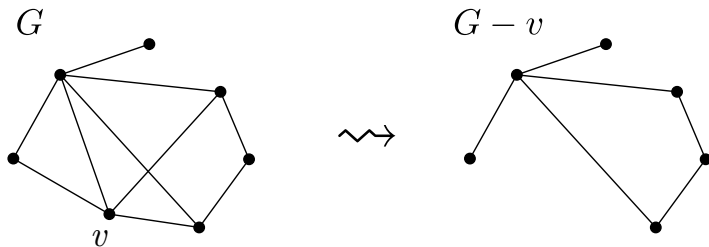
Azon, hogy a „ G gráfból elhagyjuk a v csúcsot”, azt értjük, hogy töröljük G csúcshalmazából az $v \in V(G)$ csúcsot, és töröljük G élhalmazából a v -re illeszkedő éleket. Az így kapott gráfot $G - v$ jelöli.

Precízebben:

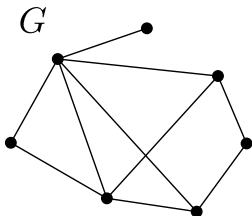
$$V(G - v) := V(G) \setminus \{v\},$$

$$E(G - v) := E(G) \setminus \{e : e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő él } G\text{-ben}\},$$

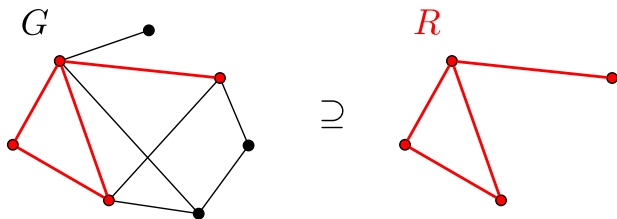
és a G -beli illeszkedések öröklődnek.



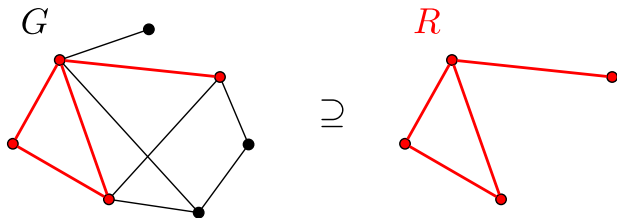
Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.

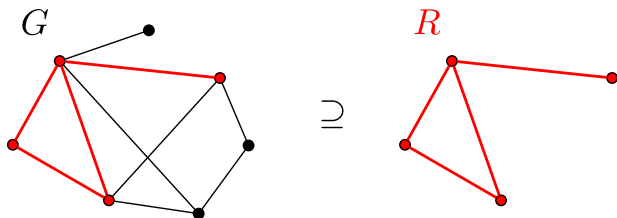


Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

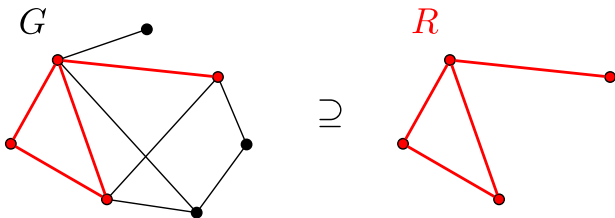
Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



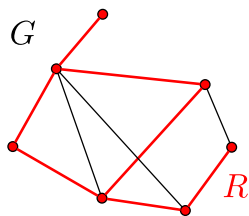
Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

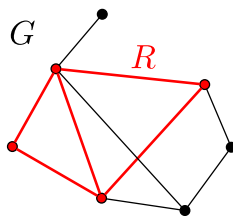
Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.



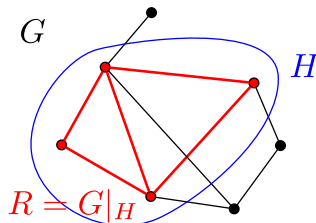
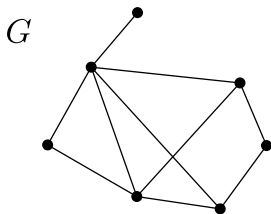
feszítő részgráf



feszített részgráf

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.

Megjegyzés. Ha az $R \subseteq G$ feszített részgráfnak a csúcshalmaza $H \subseteq V(G)$ halmaz (ez a csúcselhagyások után megmaradt pontok halmaza), akkor R pontosan azon G -beli éleket tartalmazza (az összeset!), amelyek H pontjai között haladnak. Tehát a H halmaz egyértelműen meghatározza az R feszített részgráfot, ezért R -re úgy is hivatkozunk, hogy a **H által feszített részgráf** G -ben, és $G|_H$ -val jelöljük.



Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

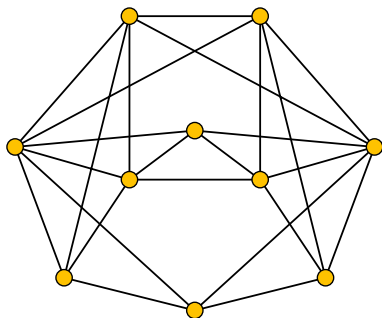
sorozatot értünk, ahol $v_0, \dots, v_k$ csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_0, \dots, v_k$ csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

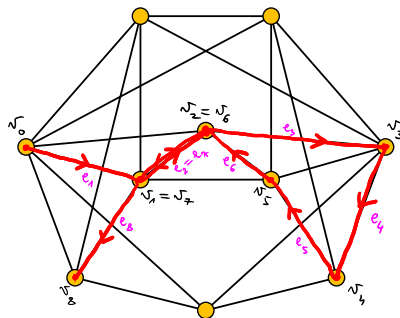


Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_0, \dots, v_k$ csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.



Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_0, \dots, v_k$ csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

Definíció. A fenti S séta **hossza** tehát k , ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta **hossza lehet 0 is**, ez esetben a séta mint sorozat „ v ” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_0, \dots, v_k$ csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

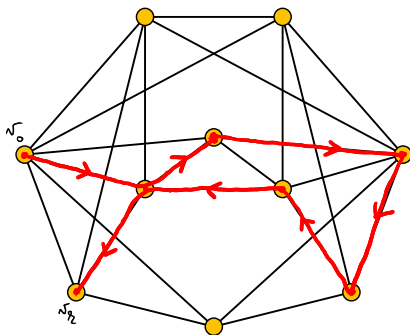
Definíció. A fenti S séta **hossza** tehát k , ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta **hossza lehet 0 is**, ez esetben a séta mint sorozat „ v ” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Definíció. A v_0 pontot a séta kezdőpontjának, a v_k pontot a séta végpontjának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha a végpont egybeesik a kezdőponttal. (Különben a séta **nyílt**.)

Példa. Az előző ábrán egy 8 hosszú nyílt séta volt látható.

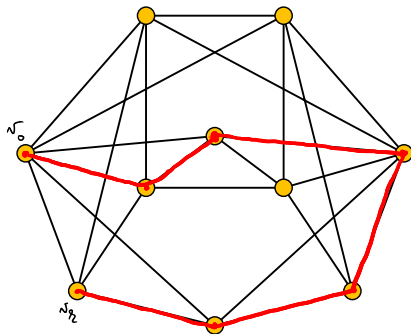
Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.



Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **vonat**, ha nincs benne élismetlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismetlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \dots, v_k$ csúcsok mind különbözők.



Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \dots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

Állítás. S út. $\implies S$ vonal. $\implies S$ séta.

(A fordított implikációk egyike sem igaz, ld. előző ábrák.)

Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \dots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

Állítás. S út. $\implies S$ vonal. $\implies S$ séta.

Állítás. A G gráf két tetszőleges x és y csúcsára pontosan akkor létezik xy -út G -ben, ha létezik xy -séta G -ben.

Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \dots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

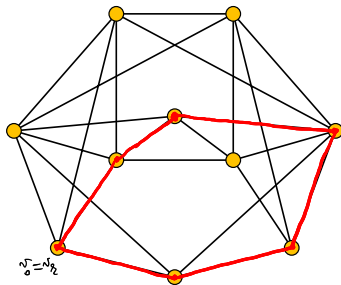
Állítás. S út. $\implies S$ vonal. $\implies S$ séta.

Állítás. A G gráf két tetszőleges x és y csúcsára pontosan akkor létezik xy -út G -ben, ha létezik xy -séta G -ben.

Bizonyítás. Ha létezik xy -séta G -ben, akkor tekintsünk egy S legrövidebb xy -sétát (vö. séta hossza). Ebben a sétában nem lehet csúcsismétlés, hiszen egy v csúcs két meglátogatása közötti sétaszakasz kivágásával rövidebb sétát kapnánk. Tehát S egy xy -út. (Az állítás másik iránya nyilvánvaló.) $\square$

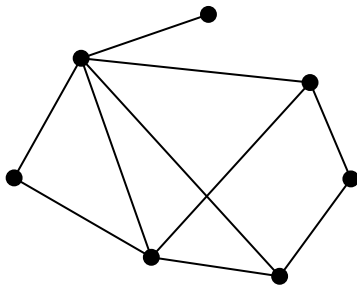
Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta **von**al, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \dots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \dots, v_k$ csúcsok mind különbözők.
- Az S séta **kör**, ha zárt, és a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs benne csúcsismétlés, valamint legalább 1 éle van, és nincs benne éliszmétlés sem.



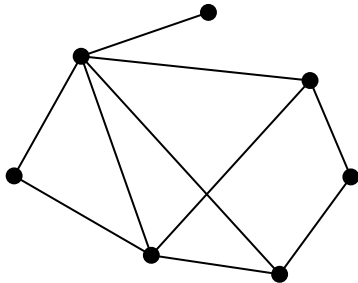
Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa összefüggő gráfra.



Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

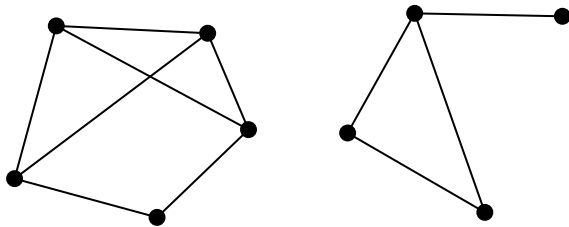
Példa összefüggő gráfra.



Könnyű meggondolni, hogy az összefüggőség igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy egy tetszőleges csúcsból el lehet jutni bármelyik másikba. (Miért?)

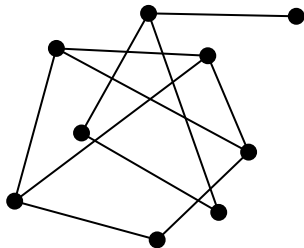
Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa NEM összefüggő gráfra.



Ez egy 9 csúcsú gráf.

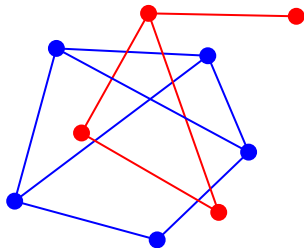
Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez ugyanaz a gráf, mint előbb.

Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez ugyanaz a gráf, mint előbb.

Köszönöm a figyelmet!