

Hamilton-út, Hamilton-kör. Dirac-tétel.

Kombinatorika

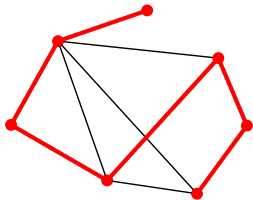
9. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2024. április 18.

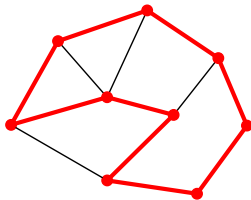
Definíció. A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Példák.



Hamilton-út

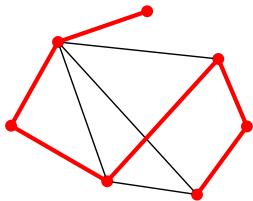


Hamilton-kör

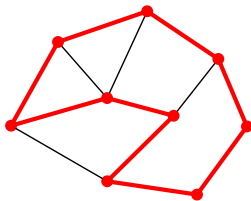
Definíció. A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Példák.



Hamilton-út



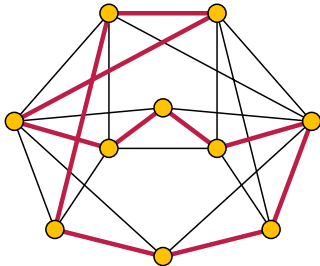
Hamilton-kör

Megjegyzés. Ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor van benne Hamilton-út is (ez fordítva nem feltétlenül igaz): A Hamilton-kör egy tetszőleges élét elhagyva Hamilton-utat kapunk.

Definíció. A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Példák.



Hamilton-kör

Definíció. A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Megjegyzés. Sajnos nem ismert hatékony algoritmus vagy „szép” akkor-és-csak-akkor tétel annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Hamilton-út/kör. A sejtés az, hogy ilyen nem is létezik:

Definíció. A G gráfban egy út **Hamilton-út**, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Megjegyzés. Sajnos nem ismert hatékony algoritmus vagy „szép” akkor-és-csak-akkor tétel annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Hamilton-út/kör. A sejtés az, hogy ilyen nem is létezik:

A $P \neq NP$ sejtés egy ekvivalens alakja. Nem létezik olyan algoritmus, amely egy determinisztikus Turing-gépen ($\approx$ mai számítógépen) polinomidőben eldönti tetszőleges input gráfról, hogy van-e benne Hamilton-kör.

Ezt precízebben majd a Bonyolultságelmélet kurzuson fogják megfogalmazni. (A „polinomidőben eldönti” azt jelenti, hogy az algoritmus futási ideje legfeljebb cn^k minden n pontú input gráfra, valamely $c > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ abszolút konstansokkal.)

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n -re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$ -nél.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n -re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$ -nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G -ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási” fokszámokból sem.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n -re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$ -nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G -ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási” foksámból sem.

2/b. A $|V| \geq 3$ feltétel sem hagyható el: K_2 -ben minden pont foka legalább $|V|/2$, de nincs a gráfban Hamilton-kör.



K_2

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n -re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$ -nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G -ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási” fokszámokból sem.

2/b. A $|V| \geq 3$ feltétel sem hagyható el: K_2 -ben minden pont foka legalább $|V|/2$, de nincs a gráfban Hamilton-kör.

2/c. Az $n/2$ korlát nem javítható (csökkenthető) a tételben, ezt például a $K_{n/2} \dot{\cup} K_{n/2}$ gráf mutatja (páros n -re).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:*

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:*

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető” (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel” előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

2 pontú út $\rightsquigarrow$ 3 pontú út $\rightsquigarrow$ 4 pontú út $\rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow n$ pontú út (= Ham.-út)

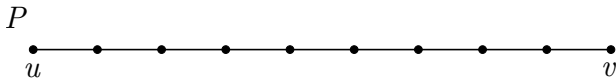
G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető” (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel” előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

Vegyünk G -ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

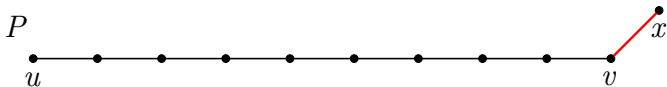
Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető” (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel” előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

Vegyünk G -ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.

1. eset („mohó útnövelés”): Ha a P út v végpontjából vezet él P -n kívüli pontba, akkor ezt a külső pontot (az összekötő éllel együtt) P -hez hozzávéve hosszabb utat kapunk. ✓



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

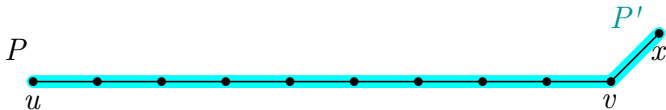
Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető” (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel” előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

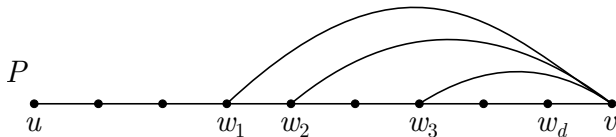
Vegyünk G -ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.

1. eset („mohó útnövelés”): Ha a P út v végpontjából vezet él P -n kívüli pontba, akkor ezt a külső pontot (az összekötő éllel együtt) P -hez hozzávéve hosszabb utat kapunk. ✓



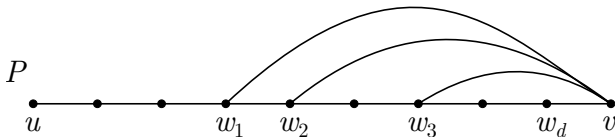
G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

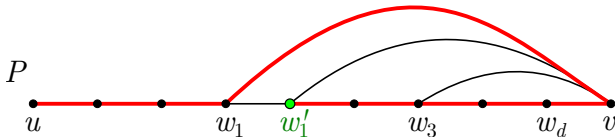
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

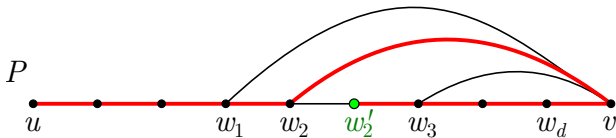
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

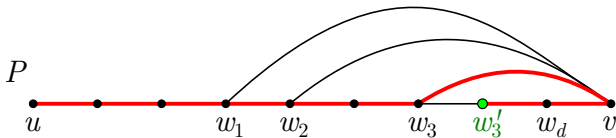
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

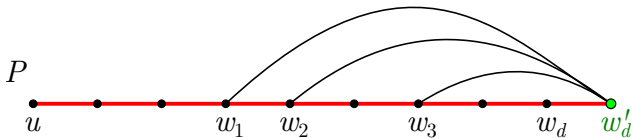
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

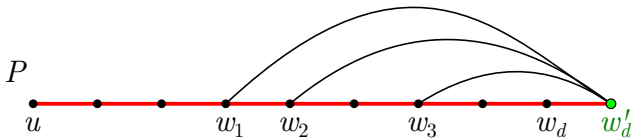
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...

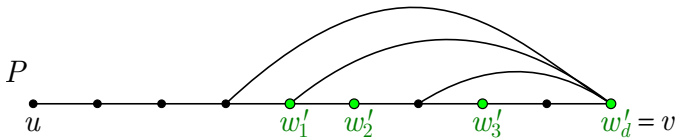


Ezen az ábrán több olyan u -ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P -n v irányába (lásd ábra).

Ezeket az utakat a későbbiekben úgy fogjuk emlegetni, hogy **csavart utak**. (P maga is egy csavart út.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

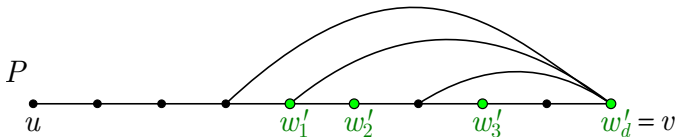
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w'_1, \dots, w'_d$

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...

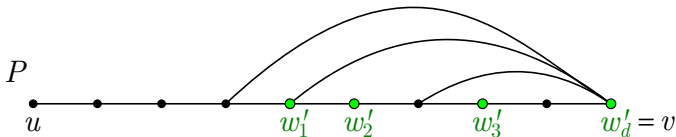


$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w'_1, \dots, w'_d$

(Ebben a bizonyításban olyankor használjuk G egyszerűségét, amikor megállapítjuk, hogy a „szomszédok száma = fokszám”. Ezt nem hangsúlyozzuk tovább.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...

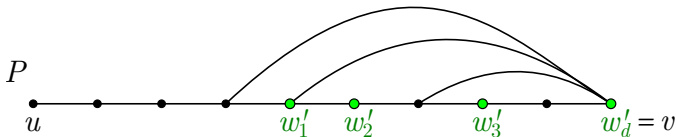


$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w'_1, \dots, w'_d$

$d(v) \geq n/2 \implies$ Ez legalább $n/2$ csavart út, illetve végpont.
(Az ábrán ez nem teljesül, ezt nem szemlélteti.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



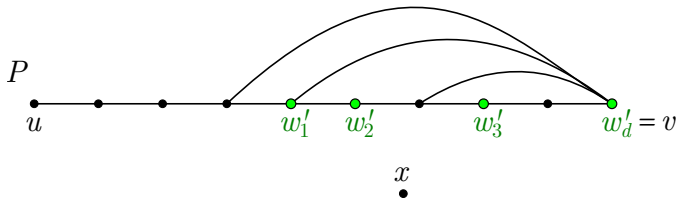
$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w'_1, \dots, w'_d$

$d(v) \geq n/2 \implies$ Ez legalább $n/2$ csavart út, illetve végpont.

A lényeg: E sok csavart út közül valamelyik már meghosszabbítható egy „külső” pontba az 1. esetben látott módon.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

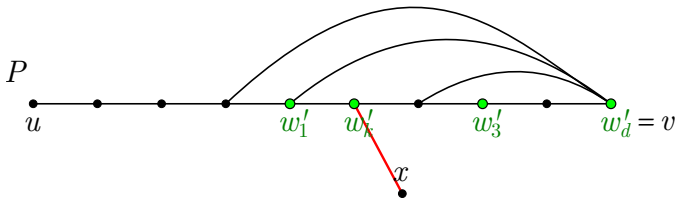
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van. . .



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P -n kívüli x pontot G -ben.
(P nem Hamilton-út, így ilyen x van.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

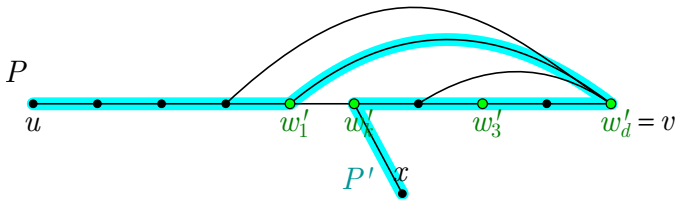
Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P -n kívüli x pontot G -ben. Láttuk, hogy a w'_i csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w'_k végponttal[†].

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P -n kívüli x pontot G -ben. Láttuk, hogy a w'_i csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w'_k végponttal[†]. A w'_k -be vezető csavart utat x -be meghosszabbítva egy P -nél (1 éllel) hosszabb utat kapunk. ✓

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. Először belátjuk, hogy G -ben van Hamilton-út:
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P -n van...

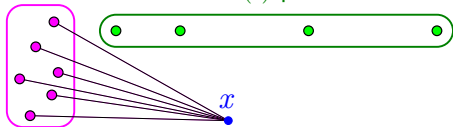
$$d(v) \geq n/2$$

$$d(x) \geq n/2$$

A csavart utak w'_i végpontjai:

$d(v)$ pont

x szomszédai:
 $d(x)$ pont



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P -n kívüli x pontot G -ben. Láttuk, hogy a w'_i csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w'_k végponttal[†]. A w'_k -be vezető csavart utat x -be meghosszabbítva egy P -nél (1 éllel) hosszabb utat kapunk. ✓

[†] **indoklása:** Ahhoz, hogy a w'_i végpontok, x szomszédai és x csupa különböző pontok legyenek, legalább $n/2 + n/2 + 1 = n + 1$ pont kellene.

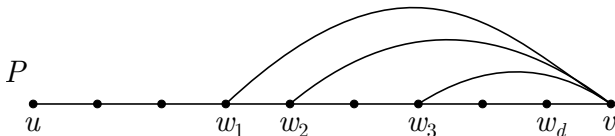
G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.

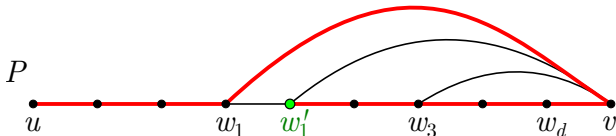


P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.

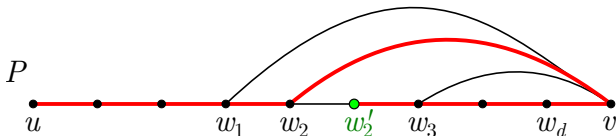
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.

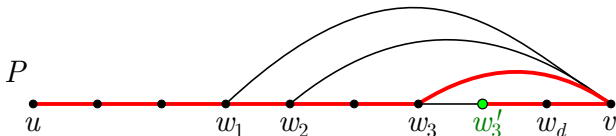
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.

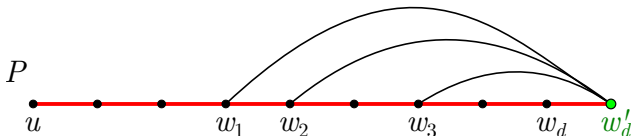
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.

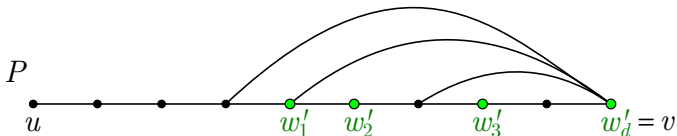
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P -n vannak.

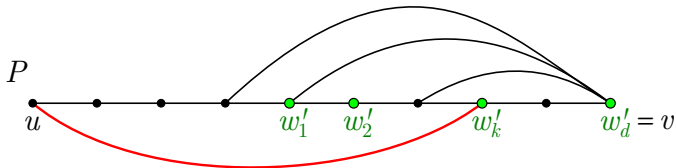
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



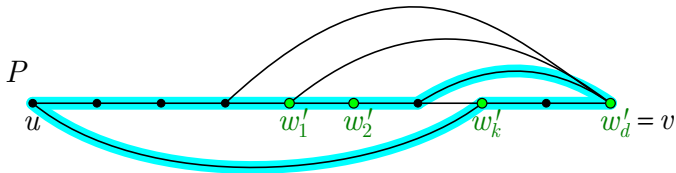
P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

Mivel $d(u) \geq n/2$, ezért u -ból vezet el valamelyik csavart Hamilton-út w'_k végpontjába. (Az indoklás ugyanaz, mint előbb, csak x helyett u -val.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$ -ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. G -ben van Hamilton-kör is.

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G -ben van egy P Hamilton-út.



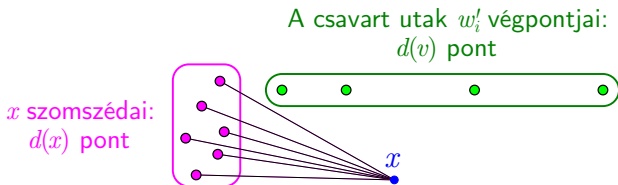
P „csavarásai” most $d(v) \geq n/2$ darab u -ból induló, csupa különböző végpontú **Hamilton-utat** adnak G -ben.

Mivel $d(u) \geq n/2$, ezért u -ból vezet el valamelyik csavart Hamilton-út w'_k végpontjába. (Az indoklás ugyanaz, mint előbb, csak x helyett u -val.) Ez az uw'_k él a megfelelő csavart Hamilton-utat Hamilton-körre zárja be. (Mivel $n \geq 3$, az uw'_k él nem a csavart Hamilton-út éle, tényleg körre zárja azt be.) $\square$

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors **algoritmus** is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors **algoritmus** is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

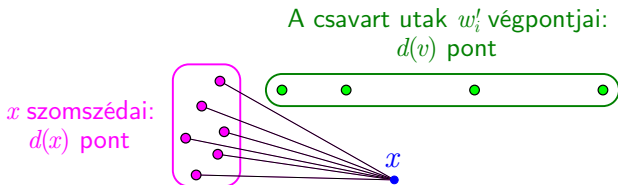
Egy általánosítás. A bizonyítás kielemezése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$ ” feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárookra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.



Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors **algoritmus** is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemezése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$ ” feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárookra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárookra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás.



Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors **algoritmus** is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemezése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$ ” feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárookra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárookra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás. Ebből adódik a Dirac-tétel következő általánosítása:

Ore-tétel*. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban bármely két nem összekötött csúcs fokszámának összege legalább n , akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors **algoritmus** is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemezése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$ ” feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárookra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárookra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás. Ebből adódik a Dirac-tétel következő általánosítása:

Ore-tétel*. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban bármely két nem összekötött csúcs fokszámának összege legalább n , akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzés. Az Ore-tételből következik a Dirac-tétel.