

A kombinatorika alapelvei. Részhalmazok.

Kombinatorika

1. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2025. február 11.

Honlapom: <http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/>

Itt megtalálhatók az elérhetőségeim, fogadóóráim, illetve az előadás és a gyakorlat honlapja stb. A kurzushonlapokról minden kivetített vagy kiosztott segédanyag letölthető, illetve elérhető a pontos tételsor is (ld. TEMATIKA).

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- Két zárthelyi [max. 20 + 20 pont]: március 27. és május 15.
- Házi feladatok [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- Pluszpontok: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- **Két zárthelyi** [max. 20 + 20 pont]: **március 27.** és **május 15.**
- **Házi feladatok** [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- **Pluszpontok**: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Előadás [max. 40 pont]:

- **Vizsga** [max. 40 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (1 kombinatorika és 1 gráfelmélet tételből). További részletek a honlapon.
- **Pluszpontok**: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.
- A 40 előadáspontból **legalább 15 pontot el kell érni** a kurzus teljesítéséhez.

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- **Két zárthelyi** [max. 20 + 20 pont]: **március 27.** és **május 15.**
- **Házi feladatok** [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- **Pluszpontok**: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Előadás [max. 40 pont]:

- **Vizsga** [max. 40 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (1 kombinatorika és 1 gráfelmélet tételből). További részletek a honlapon.
- **Pluszpontok**: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.
- A 40 előadáspontból **legalább 15 pontot el kell érni** a kurzus teljesítéséhez.

Érdemjegy:

0 – 49: (1) 50 – 62: (2) 63 – 75: (3) 76 – 87: (4) 88 – 100: (5)

Jelölések / konvenciók.

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (természetes számok halmaza)

$\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (pozitív egészek halmaza)

$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ (standard n elemű halmaz)

$|A|$ halmaz vagy multihalmaz elemszáma

$\dot{\cup}$ halmazok diszjunkt uniója, pl. $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$. Ez a szokásos halmazelméleti unió, azzal a többletinformációval, hogy az összeuniózott halmazok páronként diszjunktak.

Egy tipikus kombinatorika feladat.

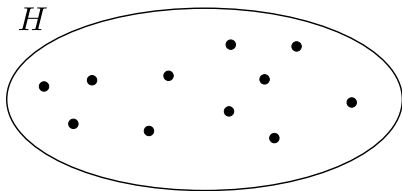
Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.



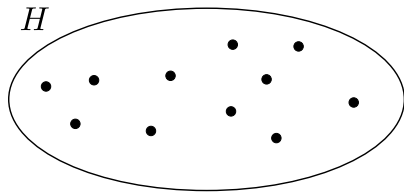
$$|H| = ?$$

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.

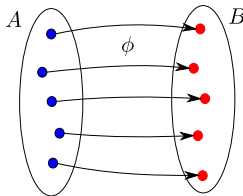


$$|H| = ?$$

A megszámlolandó objektumokat ugyanis belerakhatjuk egy halmazba. Például a fenti feladatban az **5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmazának** elemszámát kell meghatározni.

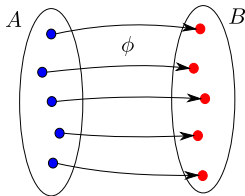
Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



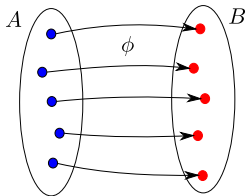
Ekvivalens definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, ha minden B -beli elemnek **pontosan egy** őse van A -ban.

ϕ injektív $\equiv$ Minden B -beli elemnek legfeljebb egy őse van A -ban.

ϕ szürjektív $\equiv$ Minden B -beli elemnek legalább egy őse van A -ban.

Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

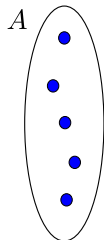
- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



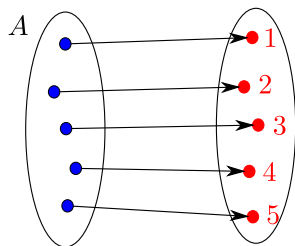
Ekvivalens definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, ha minden B -beli elemnek **pontosan egy** őse van A -ban.

Bijekciós alapelv. Az A, B véges halmazok elemszáma pontosan akkor egyezik meg, ha létezik $A \rightarrow B$ bijekció.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)

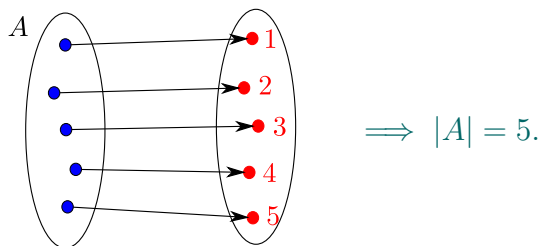


$$\implies |A| = 5.$$

Definíció. Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő” megszámlolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n -re.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



Definíció. Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő” megszámlolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n -re.

Definíció. Egy A halmaz **véges**, ha $|A| = n$ valamely n természetes számra.

Definíció. Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

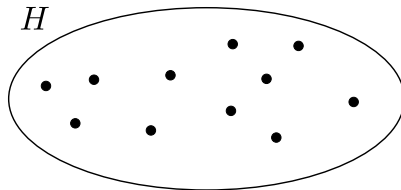
Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő” megszámlolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n -re.

Definíció. Egy A halmaz **véges**, ha $|A| = n$ valamely n természetes számra.

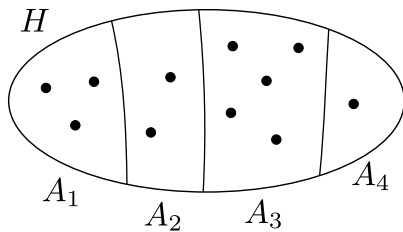
* * *

Megjegyzés. A pontosság kedvéért még jó pár olyan dolgot be kellene bizonyítanunk itt a halmazelemszámról, amit már óvodás korunkban is tudtunk. Például, hogy egy véges halmaz elemszáma **egyértelműen** meghatározott, azaz egy halmaz nem lehet egyszerre mondjuk 5 elemű és 8 elemű is. (Ezt a fenti definíció nem garantálja. Ez egy állítás, amit igazolni kell.) De erre most nincs időnk ...

Mikor adunk össze?

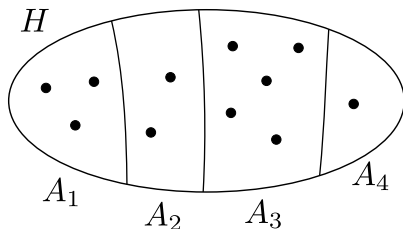


Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

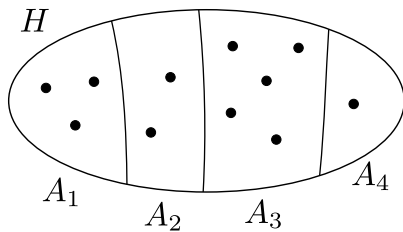
Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az

$$A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq H$$

páronként diszjunkt halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

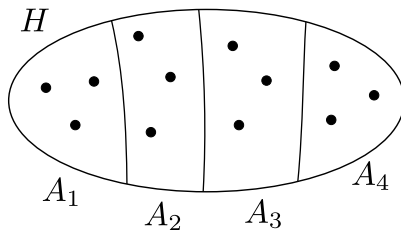
Összeadási alapelv (tömör verzió).

$$|A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|,$$

ahol $\dot{\cup}$ a diszjunkt uniót jelöli, és $A_1, \dots, A_k$ véges halmazok.

Mikor szorzunk?

Mikor szorzunk? 1. Egyrészt akkor, amikor egyforma méretű osztályokat alakítunk ki, és az összeadási alapelv alkalmazásakor ezen osztályok elemszámának összege szorzással adódik. (Általános iskola: A szorzás ismételt összeadás.)



$$|H| = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3.$$

(Ez még nem a szorzási alapelv. Hanem az összeadási alapelv speciális esete.)

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ azon k -asok ($\approx k$ hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1 -ből, második eleme A_2 -ből, ..., k -adik eleme A_k -ből kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

A fenti példában ha A_1 jelöli az „egyik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, A_2 jelöli a „másik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, akkor az $A_1 \times A_2$ halmaz elemei (a rendezett párok) a két választás lehetséges **együttes kimenetele**inek felelnek meg.

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Példa.



Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Bizonyítás. Osztályozzuk $A_1 \times \dots \times A_k$ elemeit (k -asait) aszerint, hogy mi a k -as első eleme. Ekkor $|A_1|$ darab osztály jön létre, és minden osztályban $|A_2 \times \dots \times A_k|$ darab k -as lesz (a bijekciós alapelve is használva), így az összeadási alapelv szerint

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2 \times \dots \times A_k|.$$

Ezt a gondolatmenetet megismételve $A_2 \times \dots \times A_k$ -re, kapjuk, hogy

$$|A_2 \times \dots \times A_k| = |A_2| \cdot |A_3 \times \dots \times A_k|.$$

És így tovább (= k szerinti indukció), ebből adódik az állítás:

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| &= |A_1| \cdot |A_2 \times \dots \times A_k| = \\ &= |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3 \times \dots \times A_k| = \dots = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|. \quad \square \end{aligned}$$

- Az eddig tárgyalt alapelvek (ijesztő absztraktságuk ellenére) meglehetősen nyilvánvalóak.
- Egy összeszámlálási probléma megoldásának érdemi (nehéz) része az, hogy rájövünk, hogy **hogyan** kell ezeket az alapelveket alkalmazni úgy, hogy azzal könnyebb/ismert elemi részproblémákra vezessük vissza a feladatot. **Például, hogy az összeadási alapelv használatakor hogyan válasszuk meg az osztályokat úgy, hogy aztán az osztályok elemszámát meg tudjuk határozni.**
- A bijekciós alapelveket olyankor használjuk (kimondatlanul), amikor az összeszámlolandó objektumokat először (bijektíven) „elkódoljuk” valahogy, és nem közvetlenül az összeszámlolandó objektumokat számoljuk meg, hanem a kapott kódokat (melyek száma megegyezik az összeszámlolandó objektumok számával). **Erre ezen az előadáson is fogunk még példát látni, amikor egy halmaz részhalmazait számoljuk össze.**

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned}(A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta.\end{aligned}$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned} (A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\ Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\ Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta. \end{aligned}$$

Észrevétel. Tekintsünk egy olyan n -tényezős szorzatot, ahol mindegyik tényező egy összeg, és bontsuk fel a zárójeleket. A „minden tagot minden taggal összeszorozunk” lépés úgy is megfogalmazható, hogy ha Z_i jelöli az i -edik zárójel tagjainak halmazát ($i = 1, \dots, n$), akkor a zárójel-felbontás után kapott összeg tagjai éppen a $Z_1 \times \dots \times Z_n$ halmaz elemeinek felelnek meg:

$$(t_1, \dots, t_n) \in Z_1 \times \dots \times Z_n \text{ elem} \quad \longleftrightarrow \quad t_1 \cdot \dots \cdot t_n \text{ tag a szorzatban.}$$

Feladat. Mennyi a négyjegyű számok számjegyszorzatainak összege?

$$1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = ?$$

Feladat. Mennyi a négyjegyű számok számjegyszorzatainak összege?

$$1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 3 + \cdots + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = ?$$

Megoldás.

$$(1 + 2 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9) = 45^4.$$



Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m + 1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Csak arról van szó, hogy ha s_i -vel jelöljük az i -edik skatulyában lévő tárgyak számát, akkor

$$s_1 \leq 1, s_2 \leq 1, \dots, s_m \leq 1 \implies s_1 + s_2 + \dots + s_m \leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m.$$

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. a) Ha minden skatulyába N/m -nél (szigorúan) kevesebb tárgy kerülne, akkor összesen kevesebb, mint

$$\overbrace{\frac{N}{m} + \frac{N}{m} + \cdots + \frac{N}{m}}^{m\text{-szer}} = N$$

tárgyunk lenne.



Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. b) Ha minden skatulyába N/m -nél (szigorúan) több tárgy kerülne, akkor összesen több, mint

$$\overbrace{\frac{N}{m} + \frac{N}{m} + \cdots + \frac{N}{m}}^{m\text{-szer}} = N$$

tárgyunk lenne.



Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Megjegyzés. Az általánosított skatulyaelv csak annak a ténynek a bonyolultabb megfogalmazása, hogy ha vesszük néhány szám átlagát, akkor az átlag a legnagyobb és a legkisebb átlagolt szám között van.

($N/m =$ átlagos skatulyatartalom.)

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz.

Feladat. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetbe elhelyeztünk valahogy 9 pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük három, amelyek páronkénti távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$. Azt is gondoljuk meg, hogy ez 8 pontra már nem igaz.

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H **részhalmazai**.

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H **részhalmazai**.

Definíció. Egy H halmaz **hatványhalmazán** a H összes részhalmazainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$ -val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaz:

$$\mathcal{P}(H) = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \right\}.$$

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részalmazai:

			<u>a</u> <u>b</u> <u>c</u>		<u>a</u> <u>b</u> <u>c</u>
$\emptyset$	a b c		○ ○ ○		0 0 0
$\{a\}$	a b c		● ○ ○		1 0 0
$\{b\}$	a b c		○ ● ○		0 1 0
$\{c\}$	a b c	$\equiv$	○ ○ ●	$\equiv$	0 0 1
$\{a, b\}$	a b c		● ● ○		1 1 0
$\{a, c\}$	a b c		● ○ ●		1 0 1
$\{b, c\}$	a b c		○ ● ●		0 1 1
$\{a, b, c\}$	a b c		● ● ●		1 1 1

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részalmazai:

				<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>		<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	
$\emptyset$		a	b	c	$\circ$	$\circ$	$\circ$	0	0	0	
$\{a\}$		a	b	c	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	1	0	0	
$\{b\}$		a	b	c	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	0	1	0	
$\{c\}$	$\equiv$	a	b	c	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\equiv$	0	0	1
$\{a, b\}$		a	b	c	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$		1	1	0
$\{a, c\}$		a	b	c	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$		1	0	1
$\{b, c\}$		a	b	c	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$		0	1	1
$\{a, b, c\}$		a	b	c	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		1	1	1

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részalmazja van.

		$\frac{a \ b \ c}{\circ \circ \circ}$	$\frac{a \ b \ c}{0 \ 0 \ 0}$
$\emptyset$	$a \ b \ c$	$\circ \circ \circ$	$0 \ 0 \ 0$
$\{a\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \circ \circ$	$1 \ 0 \ 0$
$\{b\}$	$a \ b \ c$	$\circ \bullet \circ$	$0 \ 1 \ 0$
$\{c\}$	$a \ b \ c$	$\circ \circ \bullet$	$0 \ 0 \ 1$
$\{a, b\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \bullet \circ$	$1 \ 1 \ 0$
$\{a, c\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \circ \bullet$	$1 \ 0 \ 1$
$\{b, c\}$	$a \ b \ c$	$\circ \bullet \bullet$	$0 \ 1 \ 1$
$\{a, b, c\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \bullet \bullet$	$1 \ 1 \ 1$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részalmazja van.

Bizonyítás. Legyen H egy n elemű halmaz. H egy részalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy a H halmaz minden elemére eldöntjük, hogy bele vesszük-e a részalmazba vagy nem („ $\bullet$ vagy $\circ$ ”). Ez n független döntés, mindegyik elemnél kétféle lehetőséggel, ami a szorzási alapelv szerint összesen valóban $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$ lehetőség. $\square$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus függvény és vektor fogalmakhoz ...

			<u>$a \ b \ c$</u>	<u>$a \ b \ c$</u>
$\emptyset$	$a \ b \ c$		$\circ \ \circ \ \circ$	$0 \ 0 \ 0$
$\{a\}$	$a \ b \ c$		$\bullet \ \circ \ \circ$	$1 \ 0 \ 0$
$\{b\}$	$a \ b \ c$		$\circ \ \bullet \ \circ$	$0 \ 1 \ 0$
$\{c\}$	$a \ b \ c$	$\equiv$	$\circ \ \circ \ \bullet$	$\equiv$ $0 \ 0 \ 1$
$\{a, b\}$	$a \ b \ c$		$\bullet \ \bullet \ \circ$	$1 \ 1 \ 0$
$\{a, c\}$	$a \ b \ c$		$\bullet \ \circ \ \bullet$	$1 \ 0 \ 1$
$\{b, c\}$	$a \ b \ c$		$\circ \ \bullet \ \bullet$	$0 \ 1 \ 1$
$\{a, b, c\}$	$a \ b \ c$		$\bullet \ \bullet \ \bullet$	$1 \ 1 \ 1$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus függvény és vektor fogalmakhoz ...

		<u>$a \ b \ c$</u>	<u>$a \ b \ c$</u>
$\emptyset$	$a \ b \ c$	$\circ \ \circ \ \circ$	$0 \ 0 \ 0$
$\{a\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \ \circ \ \circ$	$1 \ 0 \ 0$
$\{b\}$	$a \ b \ c$	$\circ \ \bullet \ \circ$	$0 \ 1 \ 0$
$\{c\}$	$a \ b \ c$	$\circ \ \circ \ \bullet$	$0 \ 0 \ 1$
$\{a, b\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \ \bullet \ \circ$	$1 \ 1 \ 0$
$\{a, c\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \ \circ \ \bullet$	$1 \ 0 \ 1$
$\{b, c\}$	$a \ b \ c$	$\circ \ \bullet \ \bullet$	$0 \ 1 \ 1$
$\{a, b, c\}$	$a \ b \ c$	$\bullet \ \bullet \ \bullet$	$1 \ 1 \ 1$

Definíció. Legyen H egy (alap)halmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus függvénye** az alábbi függvénydefinícióval definiált $\chi_R: H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \notin R \\ 1, & \text{ha } h \in R \end{cases}.$$

Definíció. Legyen H egy (alap)halmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus függvénye** az alábbi függvénydefinícióval definiált $\chi_R: H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \notin R \\ 1, & \text{ha } h \in R \end{cases}.$$

Példa. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alaphalmaz $R = \{2, 3, 5\}$ részalmazának karakterisztikus függvénye

$$\chi_R: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_R(1) = 0$$

$$\chi_R(2) = 1$$

$$\chi_R(3) = 1$$

$$\chi_R(4) = 0$$

$$\chi_R(5) = 1$$

$$\chi_R(6) = 0$$

$$\chi_R(7) = 0.$$

Definíció. Legyen H egy (alap)halmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus függvénye** az alábbi függvénydefinícióval definiált $\chi_R: H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \notin R \\ 1, & \text{ha } h \in R \end{cases}.$$

Példa. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alaphalmaz $R = \{2, 3, 5\}$ részalmazának karakterisztikus függvénye

	1	2	3	4	5	6	7
χ_R :	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	0	1	1	0	1	0	0

Definíció. Legyen H egy (alap)halmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus függvénye** az alábbi függvénydefinícióval definiált $\chi_R: H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \notin R \\ 1, & \text{ha } h \in R \end{cases}.$$

Példa. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alaphalmaz $R = \{2, 3, 5\}$ részalmazának karakterisztikus függvénye

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \chi_R: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája $\chi_R(h_i)$, minden $i \in [n]$ -re. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Definíció. Legyen H egy (alap)halmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus függvénye** az alábbi függvénydefinícióval definiált $\chi_R: H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \notin R \\ 1, & \text{ha } h \in R \end{cases}.$$

Példa. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alaphalmaz $R = \{2, 3, 5\}$ részalmazának karakterisztikus függvénye

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \chi_R: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája $\chi_R(h_i)$, minden $i \in [n]$ -re. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Megjegyzés. A karakterisztikus vektor definiálásához (és értelmezéséhez) le kell rögzíteni az alaphalmaz elemeinek egy sorrendjét!

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal. (Ezt az állítást szemlélteti a 14. dia ábrája.)

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal. (Ezt az állítást szemlélteti a 14. dia ábrája.)

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. □

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal. (Ezt az állítást szemlélteti a 14. dia ábrája.)

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. □

Következmény. Az „egy n elemű halmaznak 2^n részalmaza van” állítás bizonyításának (szórszálhasogatóan) precíz leírása:

Legyen H egy n elemű halmaz. Az előző állítás szerint létezik bijekció $\mathcal{P}(H)$ és a $\{0, 1\}^n$ halmaz között. Így a bijekciós alapelv szerint

$$|\mathcal{P}(H)| = |\{0, 1\}^n| = \overbrace{|\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{|\{0, 1\}| \cdot \dots \cdot |\{0, 1\}|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}^{n\text{-szer}} = 2^n,$$

ahol a 3. egyenlőségénél a szorzási alapelvet használtuk. □

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

Tehát pontosan a részhalmazok fele, azaz 2^{n-1} darab részhalmaz páros elemszámú, ahol n a H elemszáma.

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

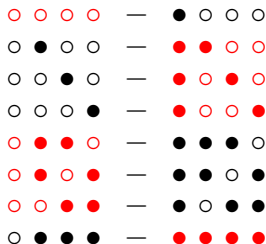
Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H -nak a h_1 -et nem tartalmazó részhalmazait párbaállítjuk a h_1 -et tartalmazó részhalmazokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$ -et választjuk. (Ez párbaállítás.)

○ ○ ○ ○	—	● ○ ○ ○
○ ● ○ ○	—	● ● ○ ○
○ ○ ● ○	—	● ○ ● ○
○ ○ ○ ●	—	● ○ ○ ●
○ ● ● ○	—	● ● ● ○
○ ● ○ ●	—	● ● ○ ●
○ ○ ● ●	—	● ○ ● ●
○ ● ● ●	—	● ● ● ●

Az 1. oszlop felel meg h_1 -nek.

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H -nak a h_1 -et nem tartalmazó részhalmazait párbaállítjuk a h_1 -et tartalmazó részhalmazokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$ -et választjuk. (Ez párbaállítás.)



Mivel mindegyik párban 1-gyel tér el a két résztvevő halmaz elemszáma, így mindegyik párban az egyik halmaz páros elemszámú, a másik páratlan elemszámú. Ez bizonyítja az állítást. □

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. $\square$

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. □

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. $\square$

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez nyilvánvaló. Azért kapott ez nevet, mert két mennyiség egyenlőségét néha így a legegyszerűbb igazolni: alkalmas összeszámlálási probléma felmutatásával.