G egy tetszőleges gráf (nem feltétlenül páros).

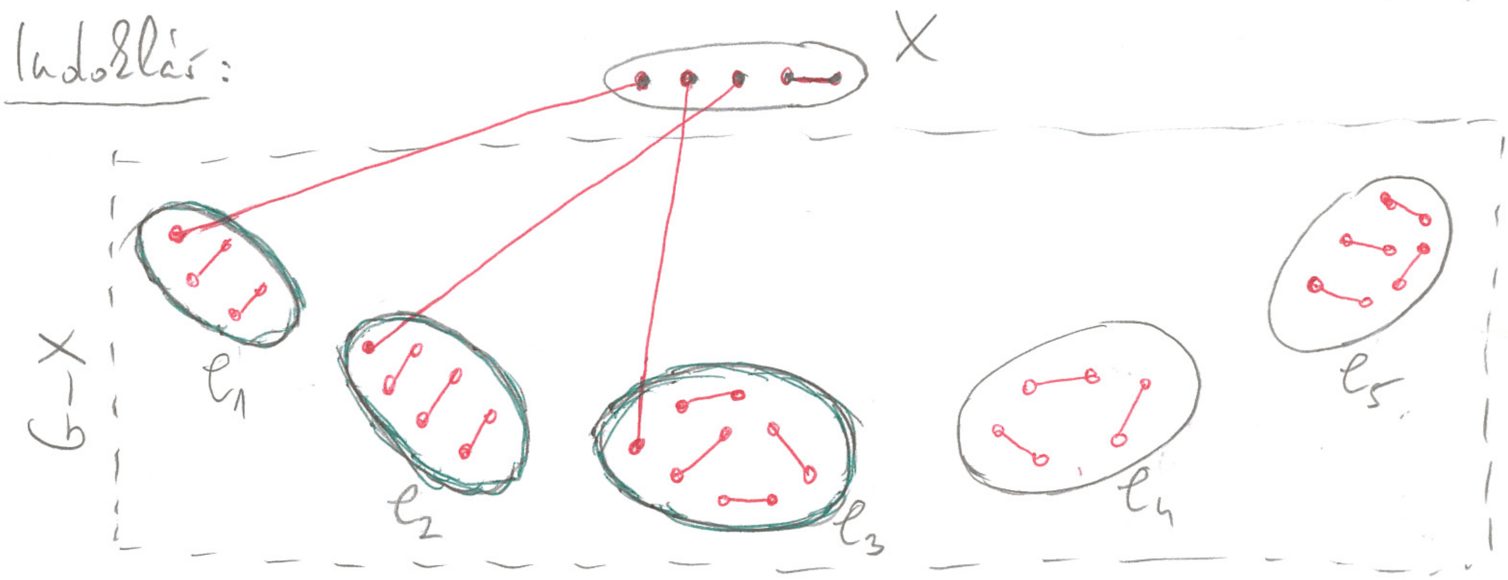
Legyen $X \subseteq V(G)$.

Jelölések: $G-X$ : a $G$-ből az $X$-beli pontok elhagyásával kapott gráf.

$c_1(G-X)$: A $G-X$ gráf <u>páratlan pontszámú</u> komponenseinek száma.

<u>Észrevétel:</u> Ha van teljes párosítás $G$-ben, akkor minden $X \subseteq V(G)$-re $c_1(G-X) \leq |X|$.

<u>Indoklás:</u>




Alsó $C_i$-k: $G-X$ komponensei; zölddel jelölve a páratlan pontszámúakat.

Tekintsünk egy $M$ teljes párosítást $G$-ben (ábrán pirossal).
Egy páratlan pontszámú $C_j$ pontjait nem lehet csak $C_j$-n belül haladó élekkel párosítani (ez triviális), így minden páratlan pontszámú $C_j$ valamely pontjából* vezet $M$-beli él $C_j$-n

kívüli pontba (*több ilyen pont is lehet $C_j$-ben).
Mivel a $C_i$ ⬭-k között nincsenek élek (lévén ők komponensek $(G-X)$-ben), ezért az előbbi $M$-beli élek másik végpontjai mind $X$-ben vannak, kijelölve annyi különböző pontot $X$-ben, ahány páratlan pontszámú komponens van $(G-X)$-ben. (M párosítás!)
Tehát $c_1(G-X) \leq |X|$. $\square$

---

Köv.: Ha találunk olyan $X \subseteq V(G)$ ponthalmazt $G$-ben, amelyre $c_1(G-X) > |X|$, akkor nincs teljes párosítás $G$-ben. $\square$

Az ilyen $X$ ponthalmazok elnevezése:

Def.: Egy $X \subseteq V(G)$ ponthalmaz Tutte-akadály $G$-ben, ha $c_1(G-X) > |X|$.

Fontos: $X = \emptyset$ is lehet Tutte-akadály!

Az alábbi tétel szerint teljes párosítás nem-létezését mindig lehet Tutte-akadállyal indokolni.

Tétel (Tutte): A $G$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha nincs benne Tutte-akadály (azaz ha $\forall X \subseteq V(G)$-re $c_1(G-X) \leq |X|$).