

Részalmazok, multihazok

Kombinatorika

2. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2022. február 14.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n -nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n -nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Jelölés. Ha H egy véges halmaz, k pedig egy természetes szám, akkor $\binom{H}{k}$ jelöli a H halmaz k -elemű részhalmazainak **halmazát**, azaz

$$\binom{H}{k} := \{R \subseteq H : |R| = k\}.$$

Például $\binom{[n]}{k}$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -elemű részhalmazainak halmaza.

Tehát $\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & & & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k -elemű részalmazait számolja meg.

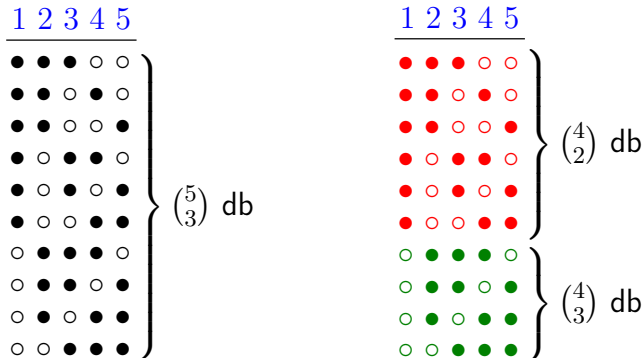
Bal oldal: Ez az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható definíciója. ✓

Jobb oldal: Az $\binom{n-1}{k}$ tag az $[n]$ halmaz azon k -elemű részalmazait számolja meg, amelyek nem tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részalmazok éppen az $n-1$ elemű $\{2, 3, \dots, n\}$ halmaz k -elemű részalmazai.)

Az $\binom{n-1}{k-1}$ tag az $[n]$ halmaz azon k -elemű részalmazait számolja meg, amelyek tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részalmazok $\{1\} \dot{\cup} R$ alakúak, ahol R a $\{2, 3, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges $(k-1)$ -elemű részalmaz lehet.) ✓ □

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k -elemű részhalmazait számolja meg.



Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Megjegyzés. Elég az első egyenlőséget bizonyítani, mert a második egyenlőségénél csupán a törtet bővítettük $(n-k)!$ -sal.

Tétel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n -féle lehet. Bármilyen is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$ -féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k -adik) elemet $(n-k+1)$ -féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓



Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n -féle lehet. Bármilyen is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$ -féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k -adik) elemet $(n-k+1)$ -féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓



Ez a (középiskolában is gyakran használt) indoklás nem túl precíz. Gondoljunk el azon, hogy hogyan kellene ezt precízen leírni, k szerinti indukcióval.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bal oldal: Most aszerint osztályozzuk a sorozatokat, hogy melyik k betű szerepel bennük.

Először eldöntjük, hogy melyik k (különböző) betű szerepeljen a sorozatunkban: Erre $\binom{n}{k}$ lehetőség van, mert $[n]$ egy k -elemű részhalmazát kell kijelölni.

Bárhogy is választottuk meg a sorozatba kerülő elemeket, ezeket $k!$ -féle sorrendben lehet leírni (ld. középiskola / későbbi előadás, vagy ismételjük meg a jobb oldalnál alkalmazott gondolatot).

Ebből adódik a bal oldali válasz. ✓



Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$(A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ A w \alpha + A w \beta + A x \alpha + A x \beta + A y \alpha + A y \beta + A z \alpha + A z \beta + \\ B w \alpha + B w \beta + B x \alpha + B x \beta + B y \alpha + B y \beta + B z \alpha + B z \beta + \\ C w \alpha + C w \beta + C x \alpha + C x \beta + C y \alpha + C y \beta + C z \alpha + C z \beta.$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned} (A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ A w \alpha + A w \beta + A x \alpha + A x \beta + A y \alpha + A y \beta + A z \alpha + A z \beta + \\ B w \alpha + B w \beta + B x \alpha + B x \beta + B y \alpha + B y \beta + B z \alpha + B z \beta + \\ C w \alpha + C w \beta + C x \alpha + C x \beta + C y \alpha + C y \beta + C z \alpha + C z \beta. \end{aligned}$$

Észrevétel. Tekintsünk egy olyan n -tényezős szorzatot, ahol mindegyik tényező egy összeg, és bontsuk fel a zárójeleket. A „minden tagot minden taggal össze-szorzunk” lépés úgy is megfogalmazható, hogy vesszük a $Z_1 \times \cdots \times Z_n$ halmaz elemeit, ahol Z_i az i -edik zárójel tagjainak halmaza, és minden $(t_1, \dots, t_n) \in Z_1 \times \cdots \times Z_n$ n -eshez felvesszük a $t_1 \cdots t_n$ szorzatot, majd ezeket a szorzatokat $+$ jellel kapcsoljuk össze.

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^n.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomiális együtthatóknak” nevezzük.

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomiális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomiális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y)(x + y)(x + y) \dots (x + y) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots yx + \dots + yyy \dots yy.\end{aligned}$$

Az előző dia alapján az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y . (Ez 2^n darab tag.)

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= (x + y)(x + y)(x + y) \dots (x + y) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots yx + \dots + yyy \dots yy. \end{aligned}$$

Az előző dia alapján az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y . (Ez 2^n darab tag.)

Minden ilyen $yx \dots yxy$ tag „hatvány alakban” felírva $x^{n-k} y^k$ alakú lesz, ahol k az y -ok száma ($k \in \{0, \dots, n\}$). Egy rögzített k -ra tehát annyi tagból fog $x^{n-k} y^k$ adódni, ahányféleképpen fel lehet írni egy n -tényezős szorzatot („szót”) x és y tényezőkkel („betűkből”) úgy, hogy az n tényezőtől pontosan k darab legyen y . Ez a szám pedig $\binom{n}{k}$, ennyiféleképpen tudjuk kijelölni az y -ok helyét. Ezért az összevonható tagok összevonása után a tétel jobb oldala adódik. \square

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Megjegyzés. Technikai okokból a 0 multiplicitást is megengedjük, így a H halmaz nem egyértelmű. Például a fenti M multihalmaz alaphalmazába belevehetjük Budapestet is, azzal, hogy az M -beli multiplicitása 0.

Informálisan. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicítások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

Informálisan. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

Definíció. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Informálisan. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

Definíció. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Most következik még néhány definíció, de ezeket nem memorizálni kell, hanem látni, hogy csupán a szemléletes multihalmaz képünk fogalmait ültetjük át a precíz környezetbe.

Informálisan. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

Definíció. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Definíciók/elnevezések. Legyen M egy H feletti multihalmaz.

- Egy $h \in H$ elemre az $M(h)$ függvényérték a h elem M -beli **multiplicitása**.
- Akkor mondjuk, hogy a $h \in H$ elem **elemé M -nek**, ha $M(h) > 0$.
- Az M multihalmaz $|M|$ -mel jelölt **elemszáma** az alaphalmaz-elemek M -beli multiplicitásainak összege:

$$|M| := \sum_{h \in H} M(h).$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Tétel. Ha a $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmazban a h_i elem multiplicitása m_i ($i = 1, \dots, n$), akkor M részmultihalmazai száma

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1).$$

Ez az n elemű halmaz részhalmái számának általánosítása. (Miért?)

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Tétel. Ha a $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmazban a h_i elem multiplicitása m_i ($i = 1, \dots, n$), akkor M részmultihalmazai száma

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1).$$

Bizonyítás. Egy N részmultihalmazban a h_i elem $N(h_i)$ multiplicitása 0-tól m_i -ig bármi lehet, ami $(m_i + 1)$ lehetőség, tetszőleges $i \in [n]$ -re. További megkötés nincs, így a szorzási alapelv adja a bizonyítandót. \square

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H -ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ha az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$ halmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$ halmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	2022	0
↓	↓	↓	↓	↓
3	2	3	1	2

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$ halmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	2022	0
↓	↓	↓	↓	↓
3	2	3	2	1

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$ halmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	2022	0
↓	↓	↓	↓	↓
0	5	0	2	4

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$ halmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	2022	0
↓	↓	↓	↓	↓
?	?	?	?	?

A lényeg az, hogy annyi 11 elemű multihalmaz van a megadott 5 elemű alaphalmaz felett, ahányféleképpen fel tudunk írni egy 5 természetes számból álló sorozatot úgy, hogy a számok összege 11 legyen.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Általánosan, a következő lemmát kell igazolnunk a fenti tétel bizonyításához:

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

egyenletnek $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ darab megoldása van a természetes számok (ból álló szám- n -esek) halmazán.

Lemma. Tetszőlegesen rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy (m_1, \dots, m_n) n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

Például ($n = 5, k = 11$ esetén),

$$(3, 2, 3, 1, 2) \mapsto \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet, \bullet, \bullet \bullet$$

$$(3, 2, 3, 2, 1) \mapsto \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet$$

$$(0, 5, 0, 2, 4) \mapsto , \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet, , \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$\vdots$$

Lemma. Tetszőlegesen rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy (m_1, \dots, m_n) n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám- n -eseket, amelyekre az elemek összege k , ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy (m_1, \dots, m_n) n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám- n -eseket, amelyekre az elemek összege k , ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Az ilyen jelsorozatok száma pedig $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen ennyiféleképpen lehet $n-1$ vesszőt és k pöttyöt leírni valamilyen sorrendben: Ennyiféleképpen tudjuk kijelölni a k pötty helyét az $n+k-1$ karakterből álló jelsorozatban. \square