

Polinomiális tétel. Átrendezések, ciklusok.

Kombinatorika

4-5. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2022. március 7.

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Példa.

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 &= \frac{3!}{3!0!0!} x^3 + \frac{3!}{0!3!0!} y^3 + \frac{3!}{0!0!3!} z^3 + \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y + \frac{3!}{2!0!1!} x^2 z + \\ &+ \frac{3!}{1!2!0!} y^2 x + \frac{3!}{0!2!1!} y^2 z + \frac{3!}{1!0!2!} z^2 x + \frac{3!}{0!1!2!} z^2 y + \frac{3!}{1!1!1!} xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 y + 3x^2 z + 3y^2 x + 3y^2 z + 3z^2 x + 3z^2 y + 6xyz.\end{aligned}$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mind-egyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.)

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban” felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k -ra, ahol $i + j + k = n$, hiszen összesen n tényezőből áll a tag.

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^n &= (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots xz + \dots + zzz \dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x , y vagy z . (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban” felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k -ra, ahol $i + j + k = n$, hiszen összesen n tényezőtől áll a tag. Egy rögzített i, j, k kitevőhármásra pontosan annyi tagból fog $x^i y^j z^k$ adódni így, ahány olyan x , y és z „betűkből” álló n betűs „szó” van, amelyben i darab x , j darab y és k darab z szerepel. Ez a szám pedig $\frac{n!}{i!j!k!}$, ugyanis a keresett szavak éppen az i db x , j db y és k db z betű lehetséges sorbaállításai. Összevonás után adódik a tétel jobb oldala. $\square$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

A binomiális tétel és a trinomiális tétel közös általánosítása a következő:

Polinomiális (vagy multinomiális) tétel.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_d=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan adódik.



Megj. Egy n hosszú sorozat tekinthető egy $[n]$ -on értelmezett függvénynek.
(Valójában ez az n hosszú sorozat precíz definíciója.)

$$5, 2, 5, 1, 0, \sqrt{2} \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 5 & 2 & 5 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{array}$$

Megj. Egy n hosszú sorozat tekinthető egy $[n]$ -on értelmezett függvénynek.
(Valójában ez az n hosszú sorozat precíz definíciója.)

$$5, 2, 5, 1, 0, \sqrt{2} \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 5 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{array}$$

Ebben a szemléletben is megfogalmazhatjuk a sorbaállítás fogalmát:

Ekvivalens def. Egy n elemű H halmaz **sorbaállítása** egy $[n] \rightarrow H$ **bijekció**.

Speciálisan, a $[n]$ sorbaállításai a $[n] \rightarrow [n]$ bijekciók.

$$254613 \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}$$

Megj. Egy n hosszú sorozat tekinthető egy $[n]$ -on értelmezett függvénynek. (Valójában ez az n hosszú sorozat precíz definíciója.)

$$5, 2, 5, 1, 0, \sqrt{2} \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 5 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{array}$$

Ebben a szemléletben is megfogalmazhatjuk a sorbaállítás fogalmát:

Ekvivalens def. Egy n elemű H halmaz **sorbaállítása** egy $[n] \rightarrow H$ **bijekció**.

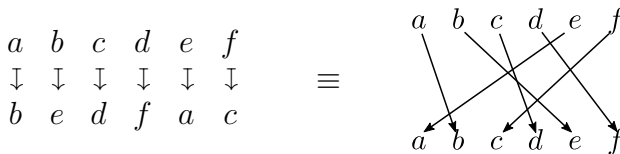
Speciálisan, a $[n]$ sorbaállításai a $[n] \rightarrow [n]$ bijekciók.

$$254613 \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}$$

A továbbiakban a függvény-szemléletből adódó tulajdonságokat vizsgálunk.

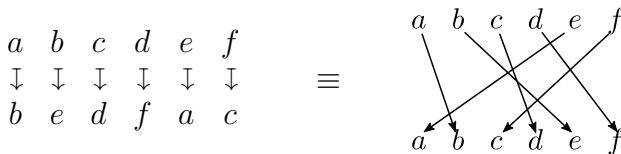
Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:



Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

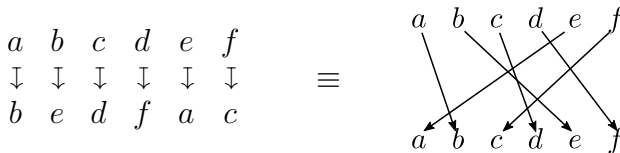
Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:



Megjegyzés. Egy $[n] \rightarrow [n]$ bijekcióra az előző dia alapján sorbaállításként és átrendezésként is gondolhatunk. Ezért az $[n] \rightarrow [n]$ bijekciók halmazát is S_n -nel jelöljük (amit $[n]$ sorbaállításainak halmazára vezettünk be).

Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

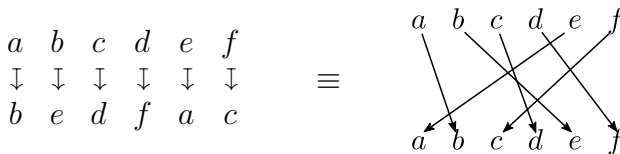
Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:



Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

Def. Egy H véges halmaz **átrendezésén** (vagy **permutációján**) egy $H \rightarrow H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:



Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

A következő (kicsit) általánosabb tételt fogjuk belátni:

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

Megjegyzés. $|A| \neq |B|$ esetén az $A \rightarrow B$ bijekciók száma 0.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_2 & b_5 & b_4 & b_6 & b_1 & b_3 \end{array}$$

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b_2	b_5	b_4	b_6	b_1	b_3

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi: A \rightarrow B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy **sorbaállítása**. (Miért?)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b_2	b_5	b_4	b_6	b_1	b_3

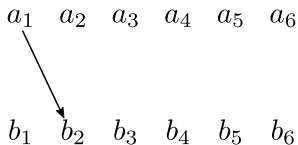
És mivel az n elemű $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van, a bizonyítandót kapjuk. □

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

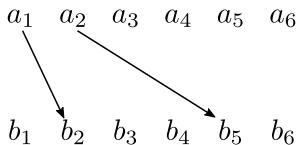
2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.

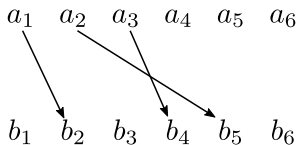


Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

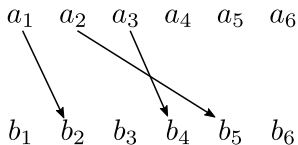
Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n - 2)$ -féleképp választhatjuk meg ...

És így tovább, ez összesen $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Tétel. Ha A és B két n -elemű halmaz, akkor az $A \rightarrow B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \rightarrow B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n - 1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B -beli elem lehet).

Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n - 2)$ -féleképp választhatjuk meg ... És így tovább, ez összesen $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Ezzel látszólag az $A \rightarrow B$ injektív fgveket számoltuk meg, de $|A| = |B| = n$ miatt egy $A \rightarrow B$ injektív fgv automatikusan szürjektív is, tehát bijektív.

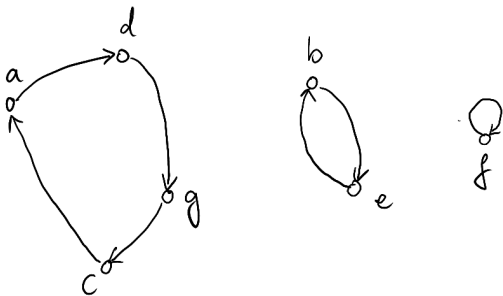
Definíció. Egy $\phi: H \rightarrow H$ permutáció **diagramján** a következő ábrát értjük:

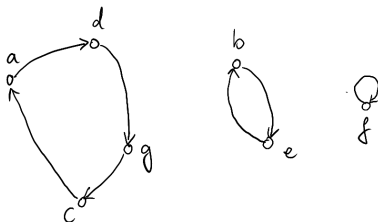
- H minden elemére felveszünk egy karikát (és megcímkezzük az elemmel).
- Minden $h \in H$ elemhez húzunk egy nyilat a h -hoz tartozó karikából a $\phi(h)$ -hoz tartozó karikába.

Példa. A $H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ halmaz

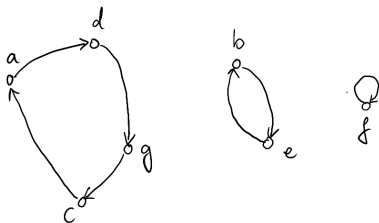
$$a \mapsto d, \quad b \mapsto e, \quad c \mapsto a, \quad d \mapsto g, \quad e \mapsto b, \quad f \mapsto f, \quad g \mapsto c$$

átrendezésének diagramja:





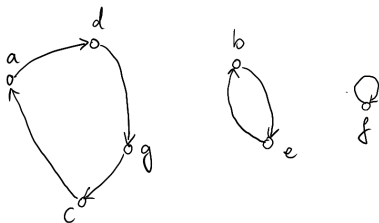
Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.



Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.

Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \dots, r_l\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (l hosszú) **ciklusát** alkotják, ha

$$\phi(r_1) = r_2, \quad \phi(r_2) = r_3, \quad \phi(r_3) = r_4, \quad \dots, \quad \phi(r_{l-1}) = r_l, \quad \phi(r_l) = r_1.$$



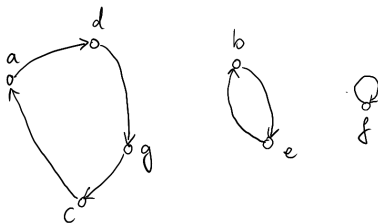
Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció **ciklusainak** nevezzük.

Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \dots, r_l\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (l hosszú) **ciklusát** alkotják, ha

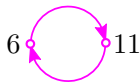
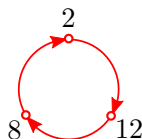
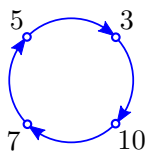
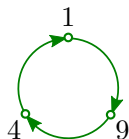
$$\phi(r_1) = r_2, \quad \phi(r_2) = r_3, \quad \phi(r_3) = r_4, \quad \dots, \quad \phi(r_{l-1}) = r_l, \quad \phi(r_l) = r_1.$$

Példa. A fenti permutációban az $\{a, d, g, c\}$ elemek egy 4 hosszú ciklust, a $\{b, e\}$ elemek egy 2 hosszú ciklust, az $\{f\}$ elem egy 1 hosszú(!) ciklust alkotnak.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

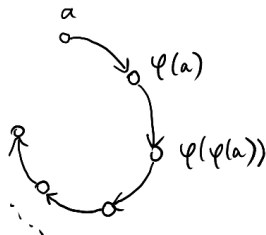
A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



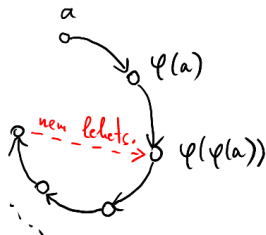
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



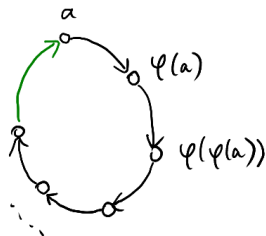
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



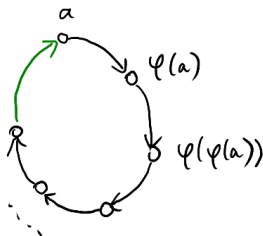
Egy darabig új elemekre lépünk, de H végeessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe **először** visszalépünk, csak a kiinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



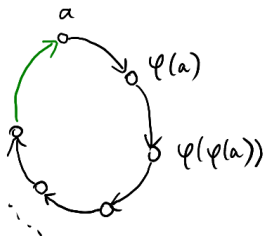
Ezzel egy ciklust találtunk (a ciklusát)! Legyen ez a ciklus C . Ha C tartalmazza H összes elemét, akkor készen vagyunk. (Tfh nem.) Mivel C minden karikájába már megy be is és ki is 1-1 nyíl, így más nyilak nem illeszkednek C elemeire. Ebből következik, hogy ϕ megszorítása $(H \setminus C)$ -re a $H \setminus C$ egy permutációja lesz.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi: H \rightarrow H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

- (i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).
- (ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: $a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \dots$



Folytassuk a ciklusok keresését a C -n kívüli részben: Egy tetszőleges C -n kívüli a' elemből indulva kövessük a nyilakat $\dots$. Az előző gondolatmenet szerint ezek ismét egy „ciklussá záródnak be”. És így tovább, megkapjuk ϕ keresett ciklusokra bontását. (Alaphalmaz elemszáma szerinti indukcióval lehet a leírást tömören befejezni.) $\square$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható egy algoritmus, amellyel egy permutáció ciklusait megtalálhatjuk.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Ne felejtsük el, hogy az algebristáktól eltérően mi az 1 hosszú ciklusokat is mindig figyelembe vesszük!

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Állítás.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n - 1)!$$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ -val jelöljük.

Állítás.
$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n - 1)!$$

Tétel*.
$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 1).$$