

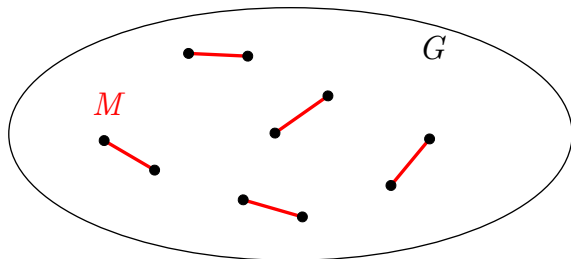
Párosítások

Kombinatorika

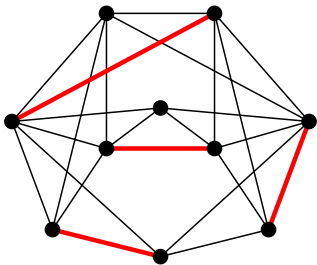
11. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2022. május 2.

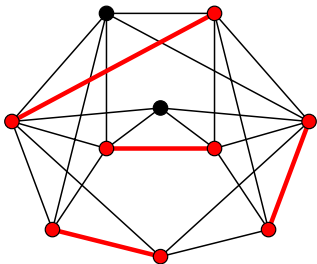
A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két különböző M -beli élnek nincs közös végpontja, és M -ben nincs hurokél.



A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két különböző M -beli élnek nincs közös végpontja, és M -ben nincs hurokél.

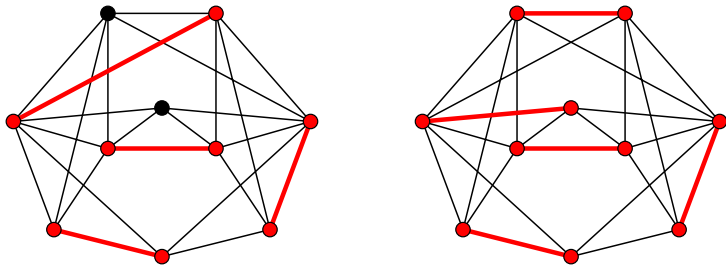


A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két különböző M -beli élnek nincs közös végpontja, és M -ben nincs hurokél.



Egy M párosítás esetén M -beli élek végpontjait az M által párosított pontoknak nevezzük. (Számuk $2|M|$.)

A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két különböző M -beli élnek nincs közös végpontja, és M -ben nincs hurokél.



Egy M párosítás esetén M -beli élek végpontjait az M által párosított pontoknak nevezzük. (Számuk $2|M|$.)

A G gráf egy párosítása **teljes**, ha G összes pontját párosítja. (A bal oldali ábrán látható párosítás nem teljes, a jobb oldali ábrán látható párosítás teljes.)

Def. $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\},$

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G -beli párosítás élszáma.

Def. $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\},$

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G -beli párosítás élszáma.

Megjegyzés.

$$\nu(G) \leq \frac{|V(G)|}{2},$$

hiszen minden M párosításra a párosított pontok száma $2|M| \leq |V(G)|$.

Továbbá $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha G -ben van teljes párosítás.

Def. $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\},$

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G -beli párosítás élszáma.

Megjegyzés.

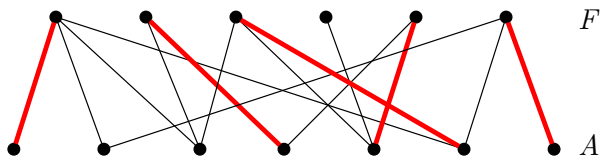
$$\nu(G) \leq \frac{|V(G)|}{2},$$

hiszen minden M párosításra a párosított pontok száma $2|M| \leq |V(G)|$.

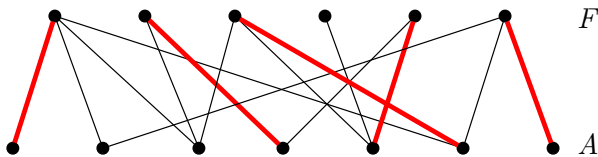
Továbbá $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha G -ben van teljes párosítás.

Megjegyzés. A $\nu(G)$ paraméter hatékonyan (polinomidőben) számolható számítógéppel. Erről bővebben MSc-n tanulunk majd. A páros gráfokra Kőnig Dénes és Egerváry Jenő magyar matematikusok dolgozták ki az algoritmust, melynek tiszteletére „magyar módszernek” nevezik az eljárást.

Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



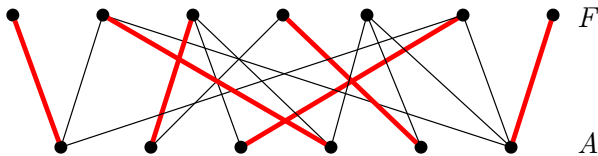
Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A -ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

Mivel az A és F színosztályok szerepe felcserélhető, itt és továbbiakban A helyére mindenhol lehet F -et is írni.

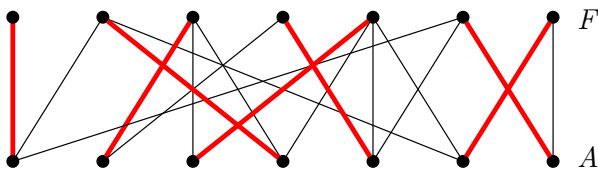
Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A -ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

A $\nu(G) = |A|$ azzal ekvivalens, hogy van olyan párosítás a G páros gráfban, amely A minden pontját párosítja. (Az ilyen párosításokat **A -t lefedő párosításoknak** nevezzük.)

Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A -ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

A $\nu(G) = |A|$ azzal ekvivalens, hogy van olyan párosítás a G páros gráfban, amely A minden pontját párosítja. (Az ilyen párosításokat **A -t lefedő párosításoknak** nevezzük.)

Végül nézzünk egy teljes párosítást egy páros gráfban (ld. fenti ábra). Mivel minden párosítás ugyanannyi pontot párosít A -ban és F -ben, ezért csak akkor léteZHET teljes párosítás, ha $|A| = |F|$.

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ **szomszédsága** az X -beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színsztályokkal.

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ **szomszédsága** az X -beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

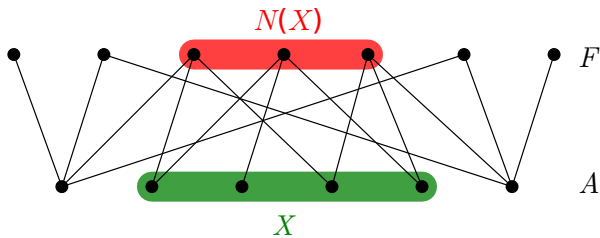
- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ **szomszédsága** az X -beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.

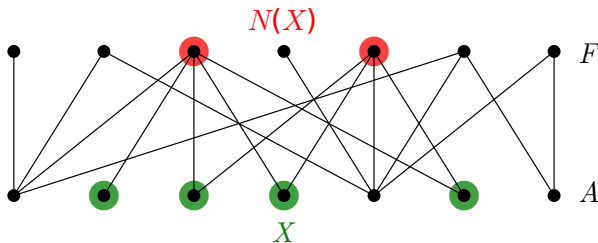


Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színsztályokkal.

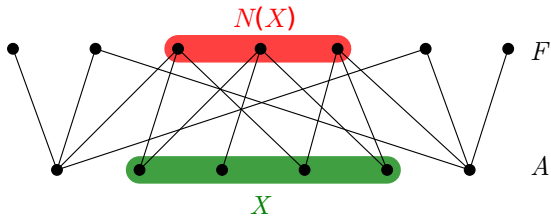
- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ **szomszédsága** az X -beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.

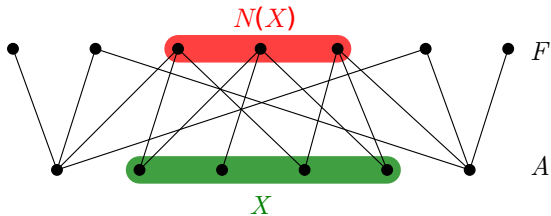


Emlékeztető. Az $X \subseteq A$ ponthalmaz **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.



Állítás. Ha a G páros gráfban van Kőnig-akadály, akkor G -ben nincs A -t lefedő párosítás (és így teljes párosítás se). Ugyanis tetszőleges M párosítás párosítatlanul hagy X -ben legalább $|X| - |N(X)| > 0$ pontot.

Emlékeztető. Az $X \subseteq A$ ponthalmaz **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.



Állítás. Ha a G páros gráfban van Kőnig-akadály, akkor G -ben nincs A -t lefedő párosítás (és így teljes párosítás se). Ugyanis tetszőleges M párosítás párosítatlanul hagy X -ben legalább $|X| - |N(X)| > 0$ pontot.

Bizonyítás. Elég az utolsó állítást bizonyítani. A szomszédság definíciója miatt az összes X -ből induló élnek $N(X)$ -ben van a másik végpontja. Tehát egy X -beli pontot csak valamelyik $N(X)$ -beli ponttal lehet párosítani. És mivel egy párosítás élei nem futhatnak össze F -ben sem, emiatt legfeljebb $|N(X)|$ darab X -beli pont lehet párosítva. \square

A következő mély tétel szerint a Kőnig-akadály megléte az egyetlen dolog, ami megghiúsíthatja, hogy A minden pontját párosíthassuk:

Tétel. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

a) (Kőnig–Hall-tétel.) G -ben akkor és csak akkor van A -t lefedő párosítás, ha G -ben nincs Kőnig-akadály, azaz ha minden $X \subseteq A$ -ra $|N(X)| \geq |X|$.

b) (Kőnig–Frobenius-tétel.) G -ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$ és G -ben nincs Kőnig-akadály.

Megjegyzés. A második állítás az első állítás következménye. Azt már végiggondoltuk, hogy teljes párosítás csak akkor lehet egy páros gráfban, ha a két színosztály mérete megegyezik. Ebben az esetben pedig a teljes párosítások éppen az A -t lefedő párosítások.

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A -ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A -ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \iff \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-akadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}. \quad (*)$$

Itt a maximalizálásba belevettük a nem Kőnig-akadály X -eket is, de ezekre $|X| - |N(X)| \leq 0$, így a maximum Kőnig-akadály esetén vétetik fel.

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A -ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \iff \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-akadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}. \quad (*)$$

3. Valójában egyenlőség áll $(*)$ -ban, amit nem bizonyítunk:

Kőnig-formula. Ha G egy páros gráf A, F színosztályokkal, akkor

$$\nu(G) = |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}.$$

Ez a formula magában foglalja a „nincs Kőnig-akadály” esetet is, ekkor mindkét oldal $|A|$ lesz (a jobb oldalon a maximum 0 lesz, mely $X = \emptyset$ -nál vétetik fel).

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-adadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}. \quad (*)$$

3. Valójában egyenlőség áll $(*)$ -ban, amit nem bizonyítottunk:

Kőnig-formula. Ha G egy páros gráf A, F színosztályokkal, akkor

$$\nu(G) = |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}.$$

Ennek lényege számunkra az, hogy ha egy M párosítás maximális méretű a G páros gráfban, akkor amennyiben M nem fedi le A -t, akkor G -ben található M maximalitását bizonyító Kőnig-akadály, vagyis olyan X Kőnig-akadály, amelyre $|X| - |N(X)|$ éppen az M által párosítatlanul hagyott A -beli pontok száma. (Ez egyáltalán nem magától értetődő.)