Komponensek

Kombinatorika

8. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022. április 11.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

$\sim$ szimmetrikus: Ha $u \sim v$, akkor $v \sim u$, hiszen ha létezik uv-séta G-ben, akkor létezik vu-séta is (egy tetszőleges uv-séta „visszafelé” ilyen).

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

$\sim$ szimmetrikus: Ha $u \sim v$, akkor $v \sim u$, hiszen ha létezik uv-séta G-ben, akkor létezik vu-séta is (egy tetszőleges uv-séta „visszafelé” ilyen).

$\sim$ tranzitív: Ha $u \sim v$ és $v \sim w$, akkor $u \sim w$. Ugyanis ha létezik egy u-ból v-be menő S_1 séta, és létezik egy v-ből w-be menő S_2 séta G-ben, akkor az S_1 és S_2 sétákat összefűzve egy (v-n áthaladó) uw-sétát kapunk G-ben. $\square$

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

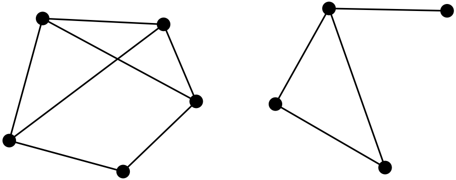
$\sim$ szimmetrikus: Ha $u \sim v$, akkor $v \sim u$, hiszen ha létezik uv-séta G-ben, akkor létezik vu-séta is (egy tetszőleges uv-séta „visszafelé” ilyen).

$\sim$ tranzitív: Ha $u \sim v$ és $v \sim w$, akkor $u \sim w$. Ugyanis ha létezik egy u-ból v-be menő S_1 séta, és létezik egy v-ből w-be menő S_2 séta G-ben, akkor az S_1 és S_2 sétákat összefűzve egy (v-n áthaladó) uw-sétát kapunk G-ben. □

Definíció. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „sétával való összekötöttség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat G komponenseinek nevezzük.

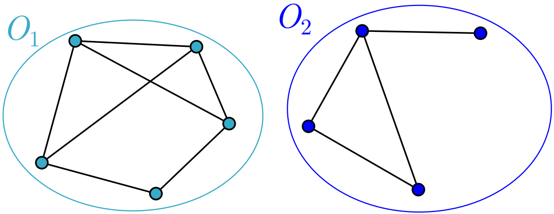
Definíció. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „sétával való összekötöttség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat G komponenseinek nevezzük.

Gráf 2 komponenssel.



Definíció. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „sétával való összekötöttség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat G komponenseinek nevezzük.

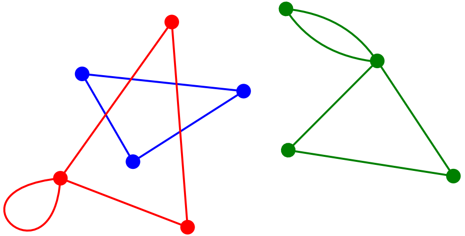
Gráf 2 komponenssel.



Megjegyzés. A komponens definíciója szerint v csúcs pontosan azon csúcsokkal van egy komponensben, amelyek elérhetők v-ből sétával. Ezen komponens élei pedig az így megtalált csúcsok között haladó G-beli élek (az összes).

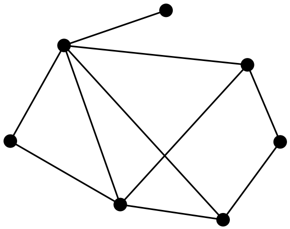
Definíció. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „sétával való összekötöttség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat G komponenseinek nevezzük.

Gráf 3 komponenssel.



Definíció. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „sétával való összekötöttség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat G komponenseinek nevezzük.

Gráf 1 komponenssel.



Megjegyzés. G összefüggő $\iff$ G-nek 1 komponense van.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Bizonyítás. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Bizonyítás. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

Az nyilvánvaló, hogy két különböző komponens között nem haladhat él, hiszen egy ilyen él két végpontja nyilván $\sim$-relációban áll (az él egy 1-hosszú utat biztosít közöttük), ami ellenmond annak, hogy küölönböző komponensben vannak. $\square$

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Bizonyítás. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

Az nyilvánvaló, hogy két különböző komponens között nem haladhat él, hiszen egy ilyen él két végpontja nyilván $\sim$-relációban áll (az él egy 1-hosszú utat biztosít közöttük), ami ellenmond annak, hogy küölönböző komponensben vannak. $\square$

Következmény. Minden gráf egyértelműen előáll összefüggő gráfok csúcsdiszjunkt uniójaként. (Ezek az összefüggő gráfok a gráf komponensei.)