

Gráfelméleti alapok

Kombinatorika

7. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022. március 28.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Emlékeztetünk, hogy $\binom{V}{2}$ a V kételemű részhalmazainak halmazát jelöli.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

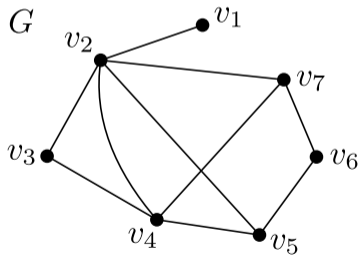
$$E = \left\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\} \right\}.$$

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

$$E = \left\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\} \right\}.$$

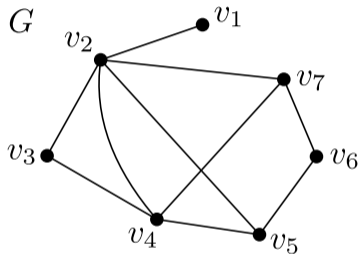
A példa szemléltetése.



Egyszerű gráf informálisan:

Véges sok csúcs (pont), bizonyos csúcspárok egy éllel összekötve.

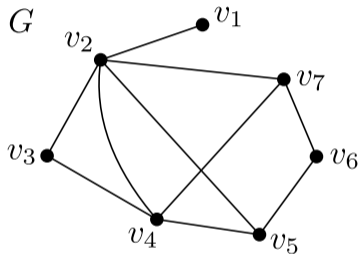
Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



Jelölések. • Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a G gráf csúcshalmazáról, illetve élhalmazáról van szó, akkor $V(G)$ -t, illetve $E(G)$ -t írunk.

- Tehát $|V(G)|$ a G gráf csúcsszáma, $|E(G)|$ pedig az élszáma.
- Az $\{u, v\}$ élt (kételemű halmazt) az olvashatóság kedvéért uv alakban írjuk.

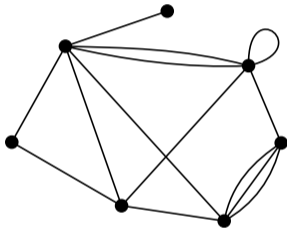
Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



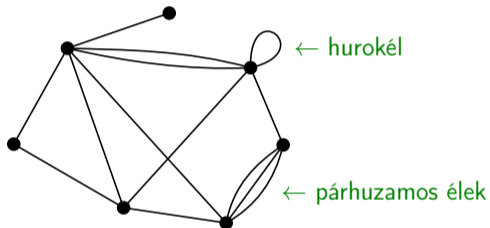
Konvenciók. • $uv \in E(G)$ esetén azt mondjuk, hogy „az u és v csúcsok összekötöttek / szomszédosak G -ben”.

• Élünk a gráf szemléletes jelentéséből adódó szóhasználat: „az uv él két végpontja u és v ”, „az $e = uv$ él illeszkedik az u csúcsra” stb.

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.

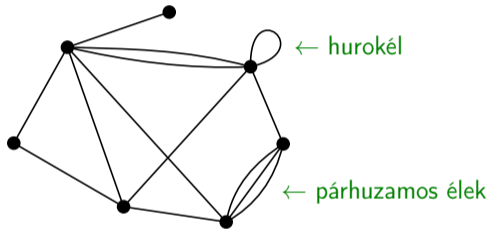


(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



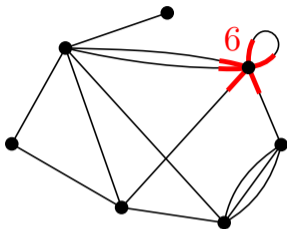
Általános gráfok esetén megengedett, hogy egy élnek egybeessen a két végpontja (az ilyen éleket **hurokéleknek** nevezzük), illetve két pont között egynél több él is haladhat (ez esetben ezen éleket **párhuzamos éleknek** vagy **többszörös éleknek** nevezzük).

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



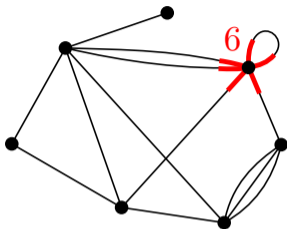
Megjegyzés. Az egyszerű gráfok tekinthetők általános gráfoknak is. (A szemléletes kép alapján ez nyilvánvaló. Formálisan, a (V, E) egyszerű gráfra tekinthetünk (V, E, I) gráfként, ahol az I illeszkedési reláció úgy van definiálva, hogy az $\{u, v\}$ él pontosan az u és v csúcsokra illeszkedik.) Egy gráf pontosan akkor egyszerű gráf, ha nem tartalmaz sem hurokét, sem párhuzamos éleket.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

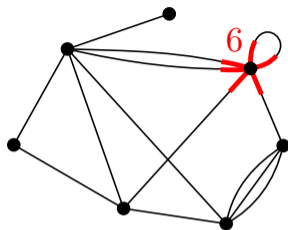
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (\text{v-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (\text{v-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Fokszám.

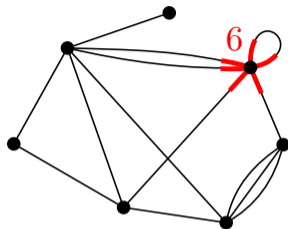


Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (\text{v-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (\text{v-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Megjegyzés. Egyszerű gráf esetén a v csúcs fokszáma a v szomszédainak száma.

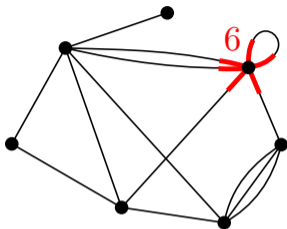
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Definíció. Egy gráf 0 fokú csúcsait **izolált csúcsoknak** nevezzük. •

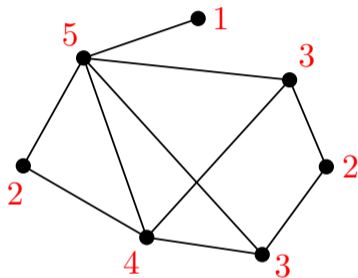
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

A gráfelmélet jelöléseinek gyakorlása kedvéért ugyanez formálisabban:

Tetszőleges G gráf esetén

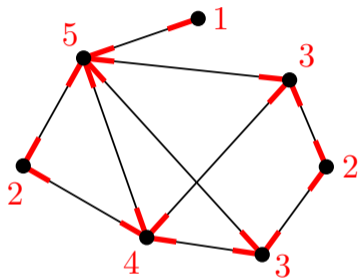
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

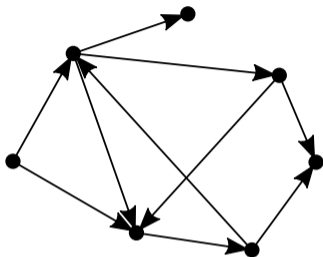


$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

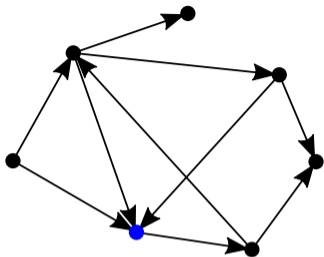
Bizonyítás. A fokszámösszeg is, és az élszám kétszerese is a gráfban található élvégeket számolja össze. (A fokszámösszeg csúcsonként csoportosítva számol; az élszámösszeg kétszerese pedig abból jön, hogy minden élnek két vége van.)



Írányított gráf.

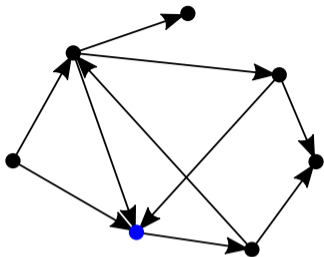


Az **írányított gráfokban** minden élnek van egy iránya. (Minden él az egyik végpontjából a másik felé mutat.) Informálisan, irányított gráfot úgy kapunk, hogy felveszünk egy irányítatlan (= „hagyományos”) gráfot, és minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A **precíz definíciót** mellőzzük, az **érdeklődő hallgató** elolvashatja a fogalomtárban.)



Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

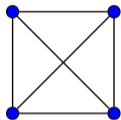
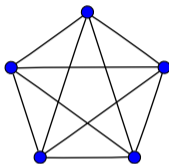
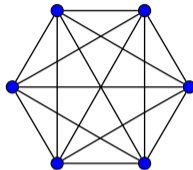


Írányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

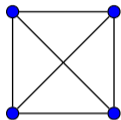
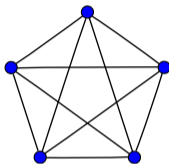
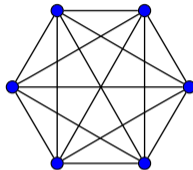
Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

Tétel + Biz. Tetszőleges irányított gráfban a csúcsok kifokainak összege megegyezik a csúcsok befokainak összegével. Mindkét mennyiség az élek számával egyenlő.

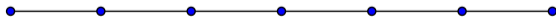
A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n -nel jelöljük.

 K_4  K_5  K_6

A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n -nel jelöljük.

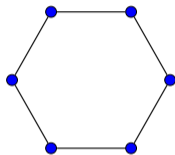
 K_4  K_5  K_6

Az **út-gráf** olyan egyszerű gráf, amely megkapható úgy, hogy felvesszünk egymás mellett néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha szomszédosak az ábrán. Az n élű út-gráfo(ka)t P_n -nel jelöljük.

 P_6

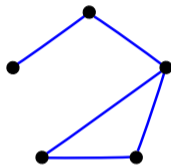
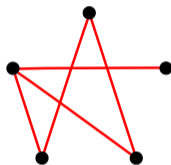
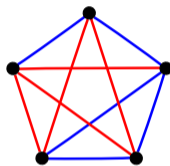
Formálisan: $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$, $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n+1}\}$.

A **kör-gráf** olyan gráf, amely megkapható úgy, hogy körszerűen felvesszünk néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze a gráfban, ha szomszédosak a körön. Az n pontú kör gráfo(ka)t C_n -nel jelöljük.

 C_6  C_2  C_1

Fontos kiegészítés, hogy C_1 -et és C_2 -t az ábrán látható módon definiáljuk (így ezek nem egyszerű gráfok; míg a nagyobb pontszámú kör-gráfok egyszerűek).

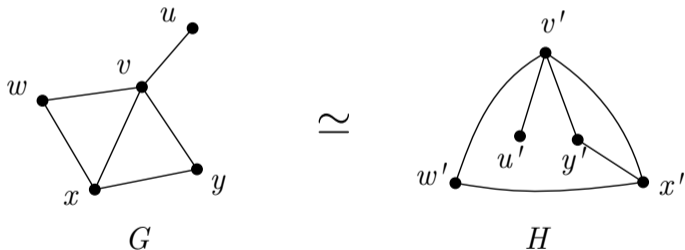
A G egyszerű gráf **komplementere** az a \overline{G} -sal jelölt egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és két csúcspontosan akkor összekötött \overline{G} -ben, ha azok nem összekötöttek G -ben.

 G  \overline{G}  K_n

Tehát ha G egy n pontú gráf, akkor \overline{G} -t úgy kapjuk, hogy az n pontú teljes gráfból töröljük G éleit.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.



$$\phi: u \mapsto u', v \mapsto v', w \mapsto w', x \mapsto x', y \mapsto y'.$$

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A \simeq reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfthalmazon.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A \simeq reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n , C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

Def. A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G -ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H -ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijekciókat **gráfizomorfizmusoknak** nevezzük.

Állítás. A \simeq reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n , C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

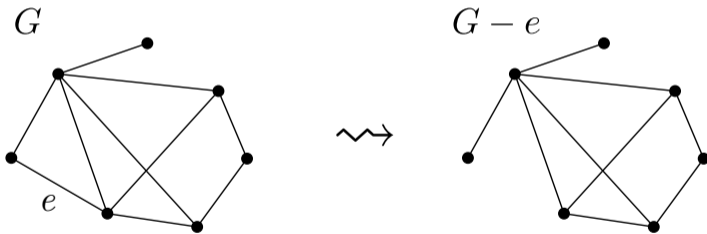
Megjegyzés. Általános gráfok izomorfiaja ezek után értelemszerűen definiálható (a fenti világoskék magyarázatot formalizálva); ez az érdeklődő hallgatók számára egyszerű gyakorló feladat.

Azon, hogy a „ G gráfból elhagyjuk az e élt”, azt értjük, hogy töröljük G élhalmazából az $e \in E(G)$ élt. Az így kapott gráfot $G - e$ jelöli.

Precízebben:

$$V(G - e) := V(G), \quad E(G - e) := E(G) \setminus \{e\},$$

és a G -beli illeszkedések öröklődnek.



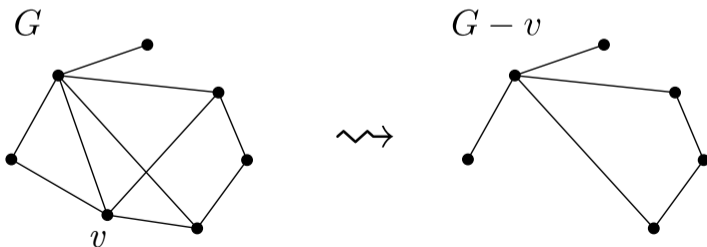
Azon, hogy a „ G gráfból elhagyjuk a v csúcsot”, azt értjük, hogy töröljük G csúcshalmazából az $v \in V(G)$ csúcsot, és töröljük G élhalmazából a v -re illeszkedő éleket. Az így kapott gráfot $G - v$ jelöli.

Precízebben:

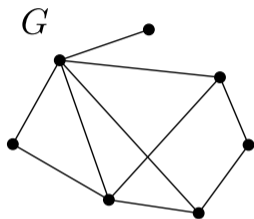
$$V(G - v) := V(G) \setminus \{v\},$$

$$E(G - v) := E(G) \setminus \{e : e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő él } G\text{-ben}\},$$

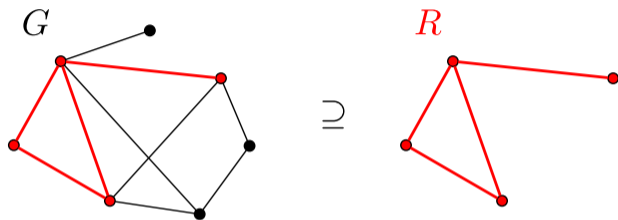
és a G -beli illeszkedések öröklődnek.



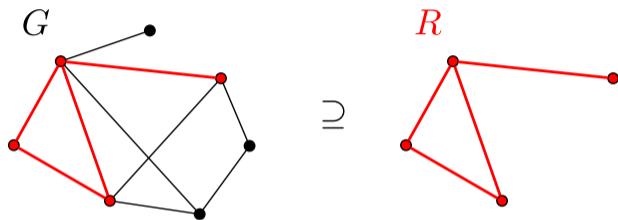
Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.

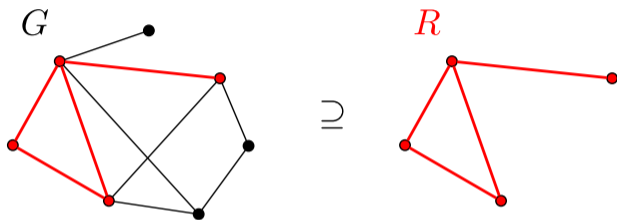


Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

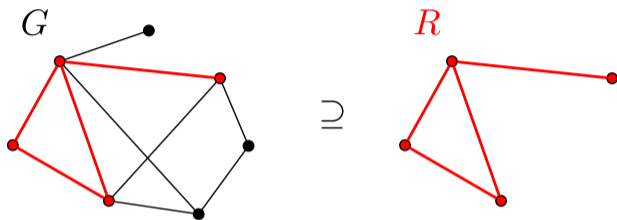
Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. Az R gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha R megkapható G -ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



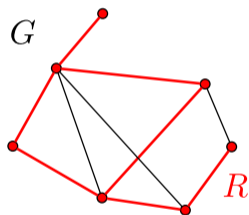
Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

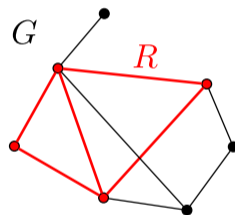
Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszítő részgráf**, ha R megkapható G -ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.



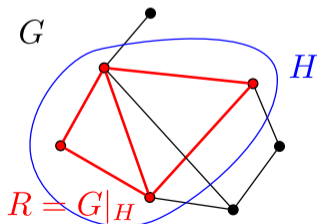
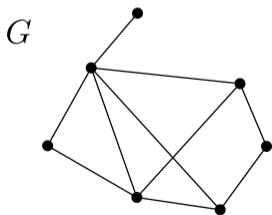
feszítő részgráf



feszített részgráf

Definíció. A G gráf R részgráfja **feszített részgráf**, ha R megkapható G -ből csak csúcsok elhagyásával.

Megjegyzés. Ha az $R \subseteq G$ feszített részgráfnak a csúcshalmaza $H \subseteq V(G)$ halmaz (ez a csúcselhagyások után megmaradt pontok halmaza), akkor R pontosan azon G -beli éleket tartalmazza (az összeset!), amelyek H pontjai között haladnak. Tehát a H halmaz egyértelműen meghatározza az R feszített részgráfot, ezért R -re úgy is hivatkozunk, hogy a **H által feszített részgráf** G -ben, és $G|_H$ -val jelöljük.



Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átléphetünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol v_1, \dots, v_k csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átléphetünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol v_1, \dots, v_k csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

Definíció. A fenti S séta **hossza** tehát k , ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta **hossza** lehet 0 is, ez esetben a séta mint sorozat „ v ” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átléphetünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol v_1, \dots, v_k csúcsok G -ben, az e_i pedig olyan él G -ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i , minden $i = 1, \dots, k$ -ra.

Definíció. A fenti S séta **hossza** tehát k , ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta **hossza lehet 0 is**, ez esetben a séta mint sorozat „ v ” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Definíció. A v_0 pontot a séta kezdőpontjának, a v_k pontot a séta végpontjának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha a végpont egybeesik a kezdőponttal. (Különben a séta **nyílt**.)

Definíciók. Legyen S a

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő e_1, \dots, e_k élek mind különbözők.

Definíciók. Legyen S a

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

séta.

- Az S séta **von**al, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő e_1, \dots, e_k élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő v_0, \dots, v_k csúcsok mind különbözők.

Definíciók. Legyen S a

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

séta.

- Az S séta **von**al, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő e_1, \dots, e_k élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő v_0, \dots, v_k csúcsok mind különbözők.
- Az S séta **kör**, ha zárt, és a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs benne csúcsismétlés, valamint legalább 1 éle van, és nincs benne éliszmétlés sem.

Definíciók. Legyen S a

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

séta.

- Az S séta **vonal**, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő e_1, \dots, e_k élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő v_0, \dots, v_k csúcsok mind különbözők.
- Az S séta **kör**, ha zárt, és a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs benne csúcsismétlés, valamint legalább 1 éle van, és nincs benne éliszmétlés sem.

Állítás. S út. \implies S vonal. \implies S séta. (A fordított implikációk egyike sem igaz.)

Definíciók. Legyen S a

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

séta.

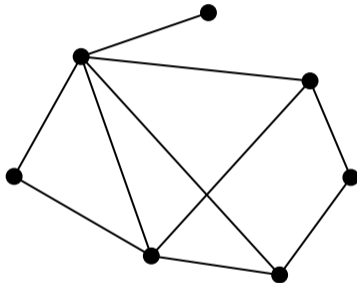
- Az S séta **von**al, ha nincs benne éliszmétlés, azaz a sorozatban szereplő e_1, \dots, e_k élek mind különbözők.
- Az S séta **út**, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő v_0, \dots, v_k csúcsok mind különbözők.
- Az S séta **kör**, ha zárt, és a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs benne csúcsismétlés, valamint legalább 1 éle van, és nincs benne éliszmétlés sem.

Állítás. S út. \implies S vonal. \implies S séta. (A fordított implikációk egyike sem igaz.)

Állítás. x és y két tetszőleges csúcs egy G gráfban. Ekkor pontosan akkor létezik xy -út G -ben, ha létezik xy -séta G -ben.

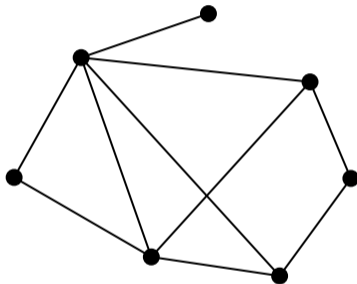
Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa összefüggő gráfra.



Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

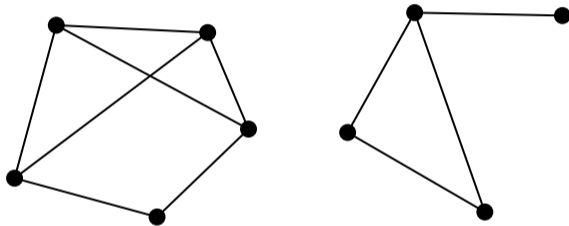
Példa összefüggő gráfra.



Könnyű meggondolni, hogy az összefüggőség igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy egy tetszőleges csúcsból el lehet jutni bármelyik másikba. (Miért?)

Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

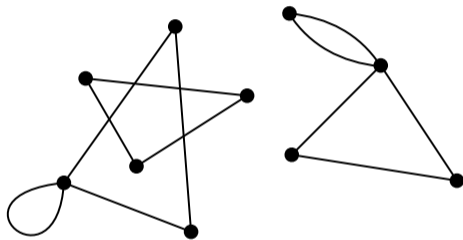
Példa NEM összefüggő gráfra.



Ez egy 9 csúcsú gráf.

Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

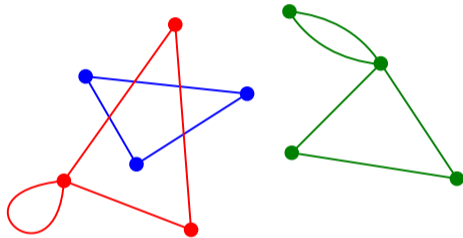
Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez egy 10 csúcsú gráf.

Definíció. Egy gráf **összefüggő**, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez egy 10 csúcsú gráf.

Köszönöm a figyelmet!