

Formális hatványsorok

(+ Newton-formula)

Kombinatorika

3. és 6. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022.

Definíció. **Formális hatványsor** alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás” írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Definíció. **Formális hatványsor** alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás” írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

A formális hatványsorokat nagybetűvel szokás jelölni.

Definíció. **Formális hatványsor** alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás” írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Megjegyzés. Formális hatványsor \equiv „Végtelen polinom”

Definíció. **Formális hatványsor** alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás” írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Jelölés. $\mathbb{R}[[x]]$: a formális hatványsorok halmaza

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsorban az x^n **együtthatóján** az a_n számot értjük. Ezt az együtthatót $[x^n]F$ -fel jelöljük.

Példa. $F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$ esetén $[x^3]F = 7$.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsorban az x^n **együtthatóján** az a_n számot értjük. Ezt az együtthatót $[x^n]F$ -fel jelöljük.

Példa. $F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$ esetén $[x^3]F = 7$.

Konvenció. Formális hatványsorok esetén is élünk a polinomoknál megszokott jelölésbeli konvenciókkal. Tehát például

$$2 + 1x + (-4)x^2 + 0x^3 + \sqrt{2}x^4 + \dots$$

helyett azt írjuk, hogy

$$2 + x - 4x^2 + \sqrt{2}x^4 + \dots$$

- $+(-a)x^n \rightsquigarrow -ax^n$
- a 0 együtthatójú tagokat nem írjuk ki
- stb.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \longleftrightarrow 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \longleftrightarrow 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat **generátorfüggvényének** is nevezzük.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \longleftrightarrow 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat **generátorfüggvényének** is nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy természetesen két hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha megegyezik az együtthatósorozatuk.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \longleftrightarrow 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat **generátorfüggvényének** is nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy természetesen két hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha megegyezik az együtthatósorozatuk.

* * *

Definíció. A **polinom** olyan formális hatványsor, amelyben csak véges sok nemnulla együttható van (tehát a 0 együtthatójú tagok elhagyása után csak véges sok tagból áll).

Példa. $2 - 3x + 5x^2 - x^3$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok **összegén** a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

formális hatványsort értjük. Jelölése: $A + B$.

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok **összegén** a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

formális hatványsort értjük. Jelölése: $A + B$.

Példa. Legyen A a 2-hatványok generátorfüggvénye, B pedig a prímszámok generátorfüggvénye, tehát

$$A = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots$$

$$B = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 13x^5 + \dots$$

Ekkor

$$A + B = 3 + 5x + 9x^2 + 15x^3 + 27x^4 + 45x^5 + \dots$$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok **szorzatán** azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0$$

$$\vdots$$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok **szorzatán** azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

Példa. Legyenek A és B az előző példabeli formális htvsorok:

$$A = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots$$

$$B = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 13x^5 + \dots$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots)(2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots) \\ &= 2 + 7x + 19x^2 + 45x^3 + \dots \end{aligned}$$

mert $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$, $1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 19$,
 $1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 45$.

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok **szorzatán** azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

A definícióban szereplő összeget így is írhatjuk:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

Szorzás szemléletesen. A szorzás úgy van definiálva, hogy a szorzat a következő eljárással is megkapható: „Minden tagot minden taggal összeszorozunk, majd az így kapott szorzatok összegét vesszük, és ebben az azonos kitevőjű tagokat összevonjuk.”

$$\begin{array}{r|l}
 \cdot & b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots = B \\
 \hline
 a_0 & a_0b_0 \quad a_0b_1x \quad a_0b_2x^2 \quad a_0b_3x^3 \quad a_0b_4x^4 \quad \dots \\
 + & \\
 a_1x & a_1b_0x \quad a_1b_1x^2 \quad a_1b_2x^3 \quad a_1b_3x^4 \quad \dots \\
 + & \\
 a_2x^2 & a_2b_0x^2 \quad a_2b_1x^3 \quad a_2b_2x^4 \quad \dots \\
 + & \\
 a_3x^3 & a_3b_0x^3 \quad a_3b_1x^4 \quad \dots \quad \ddots \\
 + & \\
 a_4x^4 & a_4b_0x^4 \quad \dots \\
 + & \\
 \vdots & \vdots \\
 \parallel & \\
 A &
 \end{array}$$

$\sum \rightarrow AB$

Valóban.

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \hline a_0 \\ + \\ a_1x \\ + \\ a_2x^2 \\ + \\ a_3x^3 \\ + \\ a_4x^4 \\ + \\ \vdots \\ \parallel \\ A \end{array} \begin{array}{l} b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots \\ a_0b_0 \quad a_0b_1x \quad a_0b_2x^2 \quad a_0b_3x^3 \quad a_0b_4x^4 \quad \dots \\ a_1b_0x \quad a_1b_1x^2 \quad a_1b_2x^3 \quad a_1b_3x^4 \quad \dots \\ a_2b_0x^2 \quad a_2b_1x^3 \quad a_2b_2x^4 \quad \dots \\ a_3b_0x^3 \quad a_3b_1x^4 \quad \dots \\ a_4b_0x^4 \quad \dots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} (a_0b_0) \\ (a_0b_1 + a_1b_0)x \\ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 \\ (a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0)x^4 \\ \dots \end{array} = B$$

$\rightsquigarrow AB$

Szorzás szemléletesen. A szorzás úgy van definiálva, hogy a szorzat a következő eljárással is megkapható: „Minden tagot minden taggal összeszorozunk, majd az így kapott szorzatok összegét vesszük, és ebben az azonos kitevőjű tagokat összevonjuk.”

Állítás. A szorzás fontos tulajdonsága (vö. Formális hatványsorok műveleti tulajdonságai segédanyag 2. pontja), hogy a **több-tényezős szorzat** is így számolható ki. Ez a tényezők száma szerinti indukcióval bizonyítható (de a bizonyítás nem vizsgaanyag).

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$ -fel jelölt) **fokszáma** az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.
(Az „azonosan 0” formális hatványsor fokszámát ∞ -nek definiáljuk.)

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$ -fel jelölt) **fokszáma** az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.
(Az „azonosan 0” formális hatványsor fokszámát ∞ -nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$ -fel jelölt) **fokszáma** az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.
(Az „azonosan 0” formális hatványsor fokszámát ∞ -nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Megjegyzés. Ahogy az utolsó példa is illusztrálja, polinomok esetén a fenti fokszámdefiníció NEM a hagyományos értelemben vett polinomfokszámot adja (ami a példában 2 lenne).

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$ -fel jelölt) **fokszáma** az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.
(Az „azonosan 0” formális hatványsor fokszámát ∞ -nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Megjegyzés. Ahogy az utolsó példa is illusztrálja, polinomok esetén a fenti fokszámdefiníció NEM a hagyományos értelemben vett polinomfokszámot adja (ami a példában 2 lenne).

Észrevétel. Tetszőleges $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén

$$\deg(F \cdot G) = \deg F + \deg G.$$

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \quad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok **hányadosának** nevezzük, és $\frac{B}{A}$ -val jelöljük.

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \quad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok **hányadosának** nevezzük, és $\frac{B}{A}$ -val jelöljük.

Megjegyzés. Csak az állításban szereplő feltételek teljesülése esetén definiáljuk a hányadost, tehát például $\frac{1}{x}$ nem értelmezett. (Ezzel szemben például $\frac{1}{1+x}$ értelmezett.)

Amennyiben $\deg A > \deg B$, úgy a $(*)$ egyenletnek nincs is megoldása, hiszen a bal oldal fokszáma minden $X \in \mathbb{R}[[x]]$ hatványsorra nagyobb, mint a jobb oldalé:

$$\deg(A \cdot X) = \deg A + \deg X \geq \deg A > \deg B.$$

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \quad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok **hányadosának** nevezzük, és $\frac{B}{A}$ -val jelöljük.

Hasznos észrevétel. Amennyiben a nevezőben a konstans tag nemnulla (azaz ha $\deg A = 0$), akkor a $\frac{B}{A}$ hányados mindig értelmezett:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{6-7x+x^2}{3+2x}, \quad \frac{x^3}{4+x^2}, \quad \dots$$

Mivel a későbbiekben csak ilyen hányadosokkal fogunk dolgozni, a fenti állítás bizonyítását is csak erre az esetre részletezzük.

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \quad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok **hányadosának** nevezzük, és $\frac{B}{A}$ -val jelöljük.

Biz. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Keressük az $X = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x^n$ formális hatványsort úgy, hogy $(*)$, vagyis az

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3 + \dots) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

egyenlőség teljesüljön. Tehát a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ ismeretlen együtthatókat kell meghatározni úgy, hogy a bal oldalon a szorzás elvégzése után a szorzat együtthatói b_0, b_1, b_2, \dots legyenek. Látni fogjuk, hogy ebből a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ együtthatókat **balról jobbra haladva** sorban kitalálhatjuk (egyértelmű módon).

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0\xi_0 = b_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ez egy végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszer, amelyben $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ az ismeretlenek (ez végtelen sok ismeretlen), az a_i és b_j számokat pedig ismerjük.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0\xi_0 = b_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark \quad \rightarrow \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0 -t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark \quad \rightarrow \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark \quad \rightarrow \quad \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0 -t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1 -et (most már ismerjük ξ_0 -t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots & \end{array} \right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0 -t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1 -et (most már ismerjük ξ_0 -t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

A 3. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_2 -t (most már ismerjük ξ_0 -t és ξ_1 -et): $\xi_2 = (b_2 - a_1\xi_1 - a_2\xi_0)/a_0 = \dots$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow & \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow & \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow & \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \rightarrow & \xi_3 = \dots \\ & & \vdots \end{array} \right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0 -t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1 -et (most már ismerjük ξ_0 -t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

A 3. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_2 -t (most már ismerjük ξ_0 -t és ξ_1 -et): $\xi_2 = (b_2 - a_1\xi_1 - a_2\xi_0)/a_0 = \dots$

A 4. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_3 -at: $\xi_3 = \dots$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow & \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow & \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow & \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \rightarrow & \xi_3 = \dots \\ & & \vdots \end{array} \right.$$

És így tovább, az egyenleteken sorban végigmenve megkapjuk azt az **egyértelmű** $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ számsorozatot, amelyre teljesül az összes egyenlőség (ξ_n értékét az $(n+1)$ -edik lépésben kapjuk meg). Fontos megjegyezni, hogy az aktuális ξ_n kifejezésénél mindig az $a_0 \neq 0$ számmal kell osztani, ami megtehető.

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(\xi_0 + \xi_1x + \xi_2x^2 + \xi_3x^3 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

\Updownarrow (szorzat definíciója)

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow & \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow & \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow & \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \rightarrow & \xi_3 = \dots \\ & & \vdots \end{array} \right.$$

Ez az eljárás akkor is működik, ha $a_0 = 0$. Az állításban szereplő $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$ feltételek garantálják, hogy az egyenletek előbb látott „felgöngyölítése” ilyenkor is pontosan egy $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ együtthatósorozathoz vezessen (ahol osztunk, ott nemnulla számmal tesszük, stb.). A részleteket mellőzzük. \square

Állítás.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Állítás.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots) &= \\ 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots & \\ -x-x^2-x^3-x^4-\dots &= 1.\end{aligned}$$



Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, és $n \in \mathbb{Z}^+$. Ekkor

$$F^n := \overbrace{F \cdot F \cdot \dots \cdot F}^{n\text{-szer}}$$

$$F^0 := 1$$

$$F^{-n} := \frac{1}{F^n}.$$

Az utolsó művelet csak akkor van definiálva, ha az $\frac{1}{F^n}$ tört értelmezve van, tehát ha $\deg F = 0$, azaz $[x^0]F \neq 0$.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

$$\text{Ha } F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ akkor } F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) **deriváltján** az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F' -vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

$$\text{Ha } F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ akkor } F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Állítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy az imént definiált műveletre is teljesülnek a hagyományos deriválásnál megszokott azonosságok, például $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

A „deriválási szabályok” megtalálhatók a formális hatványsoros segédanyagban.

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Emlékeztető: $G^k = \overbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}^{k\text{-szor}}$

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty/n} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg tekinthető végesnek, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_k G^k = 0$.

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G **kompozíciója** az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n]a_k G^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg tekinthető végesnek, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_k G^k = 0$.

Megjegyzés. $[x^0]G \neq 0$ esetén nem definiáljuk $F \circ G$ -t.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow x \leftarrow 5x$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow x \leftarrow 5x$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

Ebben a prezentációban eddig tartott a kötelező anyag.

Az utolsó két dia kiegészítés.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Emlékeztető: $X^n = \overbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}^{n\text{-szer}}$

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$ -fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1) -szeresei. $\sqrt[n]{F}$ -fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$ -fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1) -szeresei. $\sqrt[n]{F}$ -fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). **A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.**

Megjegyzés. Az állítást nem bizonyítjuk. Az osztásnál látottakhoz hasonlóan a keresett $X = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x^k$ hatványsor együtthatói $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ sorrendben haladva meghatározhatók (páros n esetén két megoldás lesz, amelyek egymás ellentettjei).

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$

$$F^{m/n} := (\sqrt[n]{F})^m.$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$

$$F^{m/n} := (\sqrt[n]{F})^m.$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Ez most csak egy **jelölés**, amely egy aritmetikai műveletekkel definiált valós számot takar. (Természetesen $\alpha \in \mathbb{N}$ esetén megkapjuk a hagyományos binomiális együttható értékét, de egyéb esetekben nincs közvetlen kombinatorikus jelentése.)

Végül megjegyezzük, hogy $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$

$$F^{m/n} := (\sqrt[n]{F})^m.$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszkapjuk a binomiális tételt).

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszkapjuk a binomiális tételt).
2. A Newton-formulában x helyére beírható olyan G hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$:

$$(1+G)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} G^k.$$

(A jobb oldalt a kompozíciónál látott módon értelmezzük.)

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

3. Az előzőekből levezethető az $\binom{n}{k}$ számok generátorfüggvénye:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^n} &= (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$