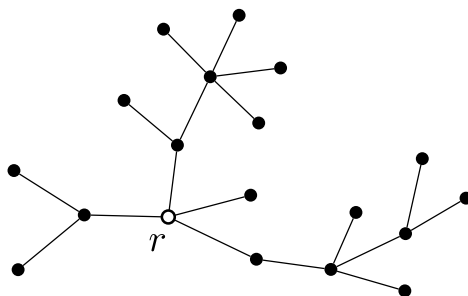


GYÖKERES FÁK

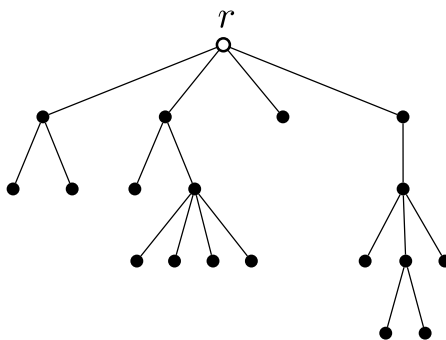
DEFINÍCIÓ. *Gyökeres fa* alatt egy olyan fát értünk, amelyben ki van tüntetve egy csúcs (melyet *gyökérnek* nevezünk).



1. ábra: Egy gyökeres fa (amelyben az r csúcs a gyökér).

TÉTEL. Minden gyökeres fa lerajzolható „családfaszerűen” (lásd 2. ábra), tehát úgy, hogy

- (i) szinteket alakítunk ki, és a csúcsokat ezeken a szinteken helyezzük el,
- (ii) a legfelső szintre egyetlen csúcs kerül: a gyökér,
- (iii) minden él két szomszédos szint (egy-egy csúcsa) között halad, és
- (iv) minden nem-gyökér csúcsnak pontosan egy szomszédja van az eggyel magasabban lévő szinten.



2. ábra: Az előző ábrán szereplő fa lerajzolása „családfaszerűen”.

BIZONYÍTÁSVÁZLAT. Tudjuk, hogy egy fában bármely két csúcs között pontosan egy út halad. A lerajzolandó T gyökeres fa minden v csúcsára nézzük meg a gyökérből a v -be vezető út hosszát, és ha ez az úthossz l , akkor helyezzük v -t a felülről számított $(l + 1)$ -edik szintre. A csúcsok elhelyezése után az élek berajzolása már egyértelműen meghatározott. Nem nehéz ellenőrizni, hogy az így kapott lerajzolás megfelelő lesz. \square

MEGJEGYZÉS. Könnyen látható, hogy minden csúcs csak arra a szintre kerülhet a lerajzolásban, ahová a fenti bizonyításban helyeztük (hiszen egy lerajzolás s -edik szintjén lévő csúcsok mindegyikéből $s - 1$ hosszú út vezet a gyökérhez: mindig lépünk a tételbeli (iv) pont szerinti „apára”, amíg el nem jutunk a gyökérhez). Tehát egy gyökeres fa családfaszerű lerajzolása a csúcsok szintenkénti permutálásától eltekintve egyértelmű.

A csúcsok elhelyezését úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a lerajzolásban a gyökér alatti szintre kerülnek a gyökér szomszédai, a következő szintre a szomszédok további szomszédai, és így tovább.

KÖVETKEZMÉNY. Minden fa lerajzolható családfaszerűen. Ehhez bármelyik csúcsot kijelölhetjük gyökérnek (mely a családfa legfelső szintjére kerül majd).