Extremális gráfelmélet, Ramsey-elmélet

Kombinatorika

12. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022. május 9.

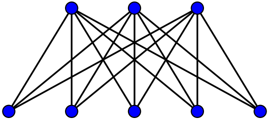
Az extremális gráfelmélet olyan kérdésekkel foglalkozik, hogy „legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha ... ?”. (Az extremális gráfelmélet a magyar matematika egyik fő erőssége.)

Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk!

Mi bevezetésként csak azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k pontú klikket?

Definíció. A teljes páros gráf olyan (egyszerű) páros gráf, amelynek két színosztálya között az összes lehetséges él be van húzva (tehát az A színosztály minden pontja össze van kötve az F színosztály összes pontjával).

$K_{m,n}$ jelöli azt a teljes páros gráfot, amelynek egyik színosztálya m pontú, a másik színosztálya n pontú.

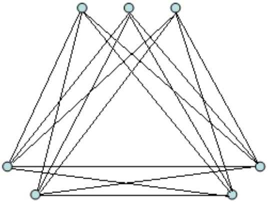


$K_{3,5}$

Megjegyzés. A síkgráfok témakörében fontos szerepet játszó „három ház - három kút" gráf a $K_{3,3}$ teljes páros gráf.

Definíció. A n pontú k részes $T_{n,k}$ Turán-gráf az az egyszerű gráf, amelynek n csúcsa van, és a csúcsok k osztályba vannak sorolva úgy, hogy

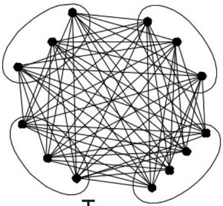
- minden osztályban a pontok száma $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$, ÉS
- két csúcs pontosan akkor összekötött $T_{n,k}$-ban, ha különböző osztályban vannak.



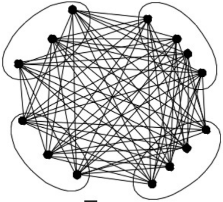
$T_{3,7}$

Kép forrása: Wikipedia

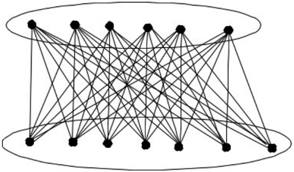
Turán-gráfok



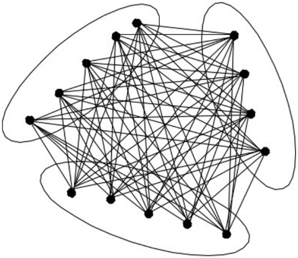
$T_{13,4}$



$T_{14,4}$



$T_{13,2}$



$T_{14,3}$

Kép forrása: Hajnal Péter honlapja

Definíció. A n pontú k részes $T_{n,k}$ Turán-gráf az az egyszerű gráf, amelynek n csúcsa van, és a csúcsok k osztályba vannak sorolva úgy, hogy

- minden osztályban a pontok száma $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$, ÉS
- két csúcs pontosan akkor összekötött $T_{n,k}$-ban, ha különböző osztályban vannak.

Megjegyzés. A $T_{n,k}$ Turán-gráf osztályméretei egyértelműen meghatározottak, és így a $T_{n,k}$ gráf izomorfia erejéig egyértelmű:

- Ha n osztható k-val, akkor minden osztály pontosan n/k pontot tartalmaz.
- Ha $n = kq + r$, ahol $q \in \mathbb{N}$ és $r \in \{1, \ldots, k-1\}$ (maradékos osztás), akkor r darab $q+1$ pontú, és $k-r$ darab q pontú osztály van. (Miért?)

Észrevétel. A $T_{n,k-1}$ Turán-gráfban nincs k pontú klikk.

Bizonyítás. Bárhogy választjuk ki a $T_{n,k-1}$ gráf k pontját, a skatulyaelv szerint lesz közöttük kettő, amelyek ugyanabba az osztályba esnek, és így nem összekötöttek. Vagyis a kiválasztott k pont nem alkot klikket. $\square$

Észrevétel. A $T_{n,k-1}$ Turán-gráfban nincs k pontú klikk.

Bizonyítás. Bárhogy választjuk ki a $T_{n,k-1}$ gráf k pontját, a skatulyaelv szerint lesz közöttük kettő, amelyek ugyanabba az osztályba esnek, és így nem összekötöttek. Vagyis a kiválasztott k pont nem alkot klikket. $\square$

Turán Pál tétele szerint az n pontú, k-klikkmentes egyszerű gráfok között a $T_{n,k-1}$ gráfnak van a legtöbb éle:

Turán-tétel. Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz k pontú klikket, akkor $|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|$.
Továbbá egyenlőség csak a $G = T_{n,k-1}$ Turán-gráf esetén áll fenn.

Megjegyzés. $|E(T_{n,k-1})| \sim \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$,
mert a $T_{n,k-1}$ gráf minden pontjának körülbelül $\frac{k-2}{k-1} n$ a foka (+ fokszámtétel).

Emlékeztető (Turán-tétel). Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz k pontú klikket, akkor $|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|$.

A Turán-tételt csak a $k = 3$ esetben bizonyítjuk (lásd tábla):

Mantel-tétel. Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amelyben nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Megjegyzés. A Mantel-tétel valóban a $k = 3$ speciális esete a Turán-tételnek, mert

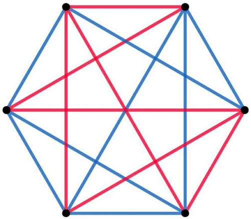
- a háromszögek pontosan a 3 pontú klikkek,
- a $T_{n,2}$ Turán-gráf a $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ teljes páros gráf (vö. $T_{13,2}$ a korábbi ábrán),
- könnyen ellenőrizhető, hogy $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$-nek $\lfloor n^2/4 \rfloor$ éle van.

Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

(Az ismeretségek természetesen ebben a feladatban is kölcsönösek.)

Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

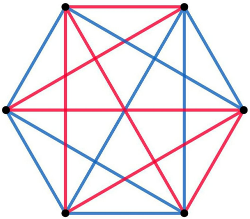
Az ismeretségeket szemléltethetjük egy 6 csúcsú gráffal, ahol két csúcsot (embert) kék éllel kötünk össze, ha ismerik egymást, és pirossal kötjük őket össze, ha nem. Így egy olyan K_6 teljes gráfot kapunk, amelynek minden éle pirosra vagy kékre van színezve.



Kép forrása: Görbe Tamás Twitterje

Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

Az ismeretségeket szemléltethetjük egy 6 csúcsú gráffal, ahol két csúcsot (embert) kék éllel kötünk össze, ha ismerik egymást, és pirossal kötjük őket össze, ha nem. Így egy olyan K_6 teljes gráfot kapunk, amelynek minden éle pirosra vagy kékre van színezve.



Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

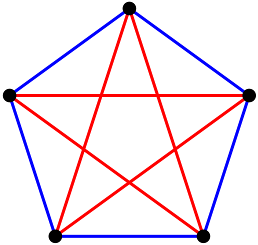
Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Lásd tábla. $\square$

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Lásd tábla. $\square$

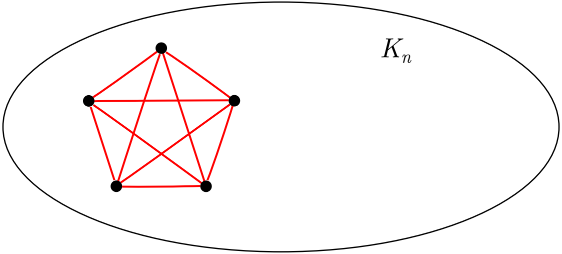
Megjegyzés. A feladat nem igaz 5 emberrel (5 pontú piros-kék élszínezett teljes gráfra):



Az ábra az 5 pontú teljes gráf egy olyan élszínezését mutatja, amelyben nincs egyszínű háromszög.

Az egyszínű háromszögek fogalmát általánosítjuk klikkekre:

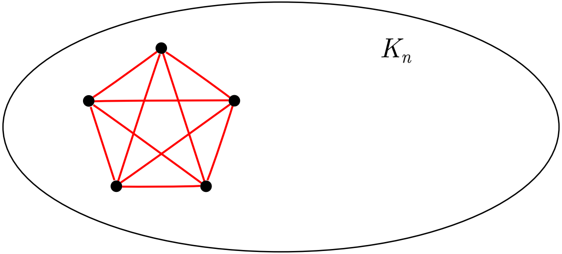
Definíció. A K_n teljes gráf piros-kék élszínezésében k pont monokromatikus klikk(et alkot), ha a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek. (A közös élszín alapján értelemszerűen beszélünk kék ill. piros monokromatikus klikkről.)



Egy 5 pontú monokromatikus klikk (piros)

Az egyszínű háromszögek fogalmát általánosítjuk klikkekre:

Definíció. A K_n teljes gráf piros-kék élszínezésében k pont monokromatikus klikk(et alkot), ha a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek. (A közös élszín alapján értelemszerűen beszélünk kék ill. piros monokromatikus klikkről.)



Egy 5 pontú monokromatikus klikk (piros)

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-től függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk”.

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-tól függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk".

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés összefoglalása. $\square$

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-től függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk".

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés összefoglalása. □

Megj. $R(4) = 18$. Azonban $k \geq 5$ esetén azonban $R(k)$ pontos értéke nem ismert. (Például $R(5)$ értékéről is csak annyit sikerült bizonyítani eddig, hogy 43 és 48 között van.)

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-tól függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf ÖSSZES piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk”.

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés összefoglalása. $\square$

Megj. $R(4) = 18$. Azonban $k \geq 5$ esetén azonban $R(k)$ pontos értéke nem ismert. (Például $R(5)$ értékéről is csak annyit sikerült bizonyítani eddig, hogy 43 és 48 között van.)

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 2$ esetén.