

Euler-vonal. Euler-tétel.

Kombinatorika

8. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2022. április 4.

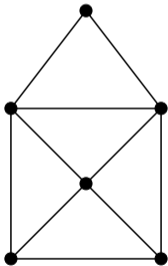
Def. A G gráfban a \mathcal{V} séta **Euler-vonal**, G minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G -ben.

Def. A G gráfban a \mathcal{V} séta **Euler-vonal**, G minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G -ben.

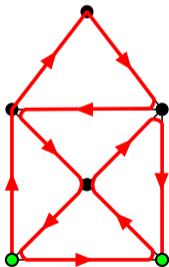
Példa (nyílt Euler-vonal).



Def. A G gráfban a \mathcal{V} séta **Euler-vonal**, G minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G -ben.

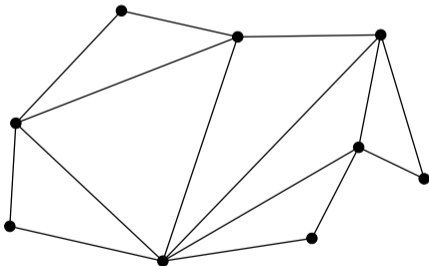
Példa (nyílt Euler-vonal).



Def. A G gráfban a \mathcal{V} séta **Euler-vonal**, G minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G -ben.

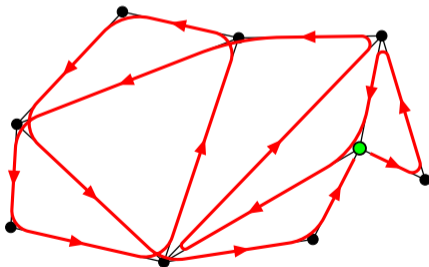
Példa (zárt Euler-vonal).



Def. A G gráfban a \mathcal{V} séta **Euler-vonal**, G minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G -ben.

Példa (zárt Euler-vonal).



Euler-tétel.

- a) Egy G gráfban akkor és csak akkor van **zárt** Euler-vonal, ha G összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
- b) Egy G gráfban akkor és csak akkor van **nyílt** Euler-vonal, ha G összefüggő, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

A két állítás együtt a következőt adja:

- c) Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha G összefüggő, és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Kiegészítés. A b) pont bizonyításából majd kiolvasható lesz, hogy amennyiben két páratlan fokú csúcs van (és öf. a gráfunk), akkor minden (nyílt) Euler-vonal a két páratlan fokú csúcs között halad: egyikből indul, másikban végződik.

Euler-tétel.

- a) Egy G gráfban akkor és csak akkor van **zárt** Euler-vonal, ha G összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
- b) Egy G gráfban akkor és csak akkor van **nyílt** Euler-vonal, ha G összefüggő, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

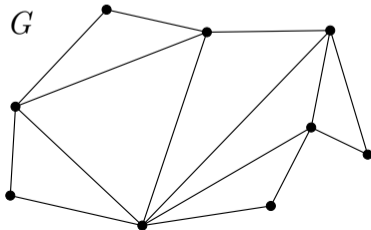
A két állítás együtt a következőt adja:

- c) Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha G összefüggő, és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megjegyzés. Mivel egy gráfban nem lehet pontosan 1 darab páratlan fokú csúcs (a fokszámösszeg mindig páros), ezért a c) állításban a „0 vagy 2 páratlan fokú csúcs van” feltétel úgy is megfogalmazható, hogy „legfeljebb két páratlan fokú csúcs van”.

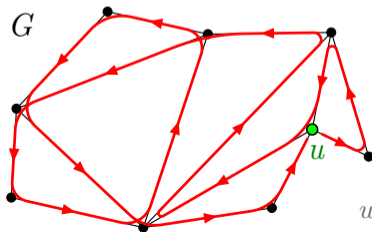
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.



a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.



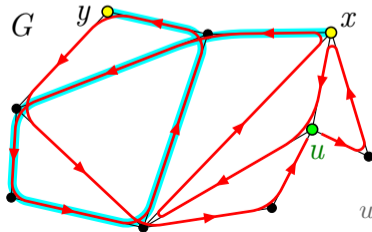
u : kezdőpont/végpont

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓



u : kezdőpont/végpont

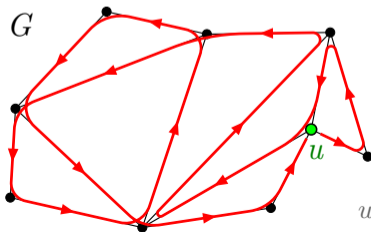
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓



u : kezdőpont/végpont

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

v
•

u
•

Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:



Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonalban nincs élisemlézés.)



Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

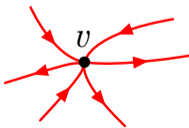
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonalban
nincs élisemlézés.)



u
•

Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

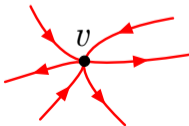
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen át-haladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonal minden élt bejárt, ez az összes élvég v körül.)



u

$$d(v) = 2 \times (\text{áthaladások száma}) \quad \leftarrow \text{páros}$$

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

u
●

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle



$$d(u) = 1 +$$

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen át-haladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle

– áthaladások u -n



$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) +$$

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

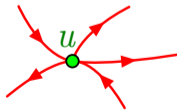
2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen át-haladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle

– áthaladások u -n



$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) +$$

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \implies irány, azaz a feltételek szükségessége:

Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.

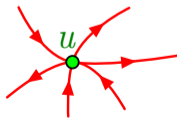
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies G$ összefüggő. ✓

2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen át-haladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) \implies minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

• Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

- az Euler-vonal első éle
- áthaladások u -n
- az Euler-vonal utolsó éle

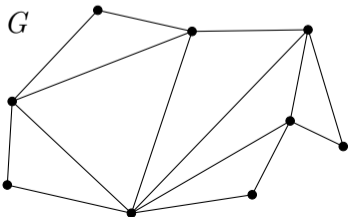


$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) + 1 \quad \leftarrow \text{páros}$$

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.



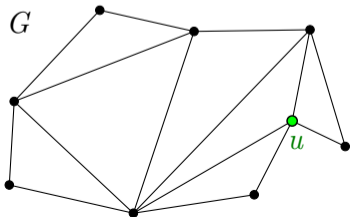
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

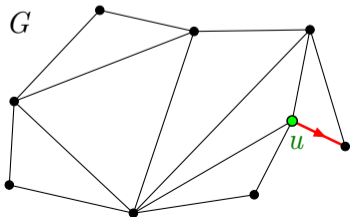
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

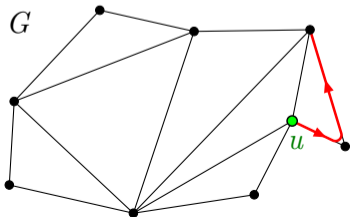
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

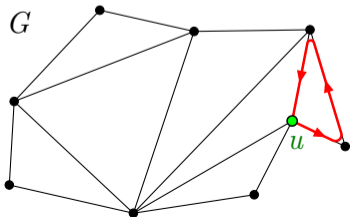
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

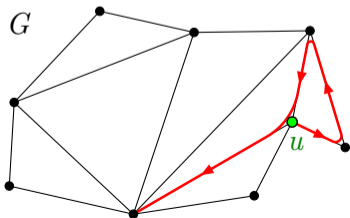
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

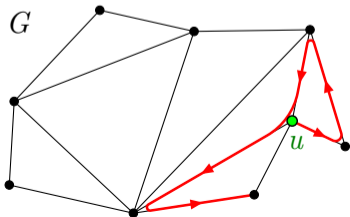
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

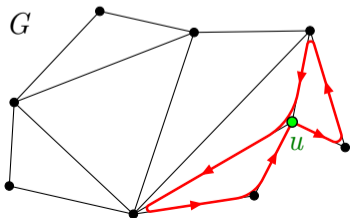
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

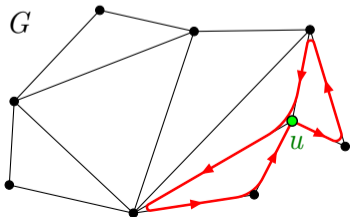
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Mivel egy G -beli vonal hossza legfeljebb $|E(G)|$ lehet, valamikor biztosan elakadunk (= nem tudunk érintetlen élen továbblépni).



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

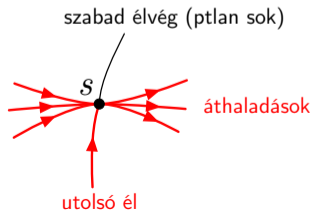
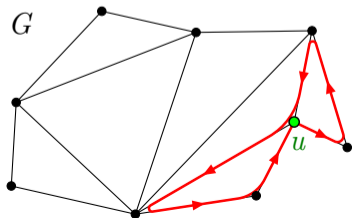
Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségsége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

\forall fok páros \implies Csak a kiinduló u csúcsban akadhatunk el!

OKA: Amikor egy u -tól különböző s csúcsban állunk, akkor ezen a csúcson korábban már valahányszor áthaladtunk (bemegy/kimegy), majd végül beléptünk, így összesen páratlan sok s -ből induló élvégen jártunk már. Mivel s foka páros, kell még lennie „szabad” élvégeknek, amin tovább tudunk haladni.

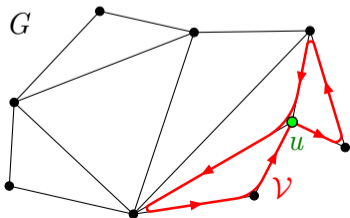


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy zárt \mathcal{V} vonalat kapunk G -ben.

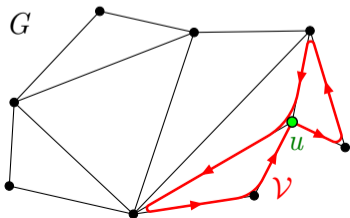


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy zárt \mathcal{V} vonalat kapunk G -ben.
3. Ha ez a \mathcal{V} Euler-vonal, akkor készen vagyunk. (Tfh. nem az.)

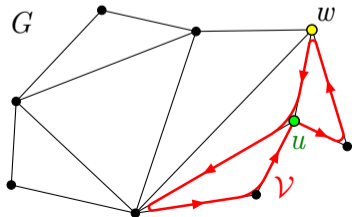


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy zárt \mathcal{V} vonalat kapunk G -ben.
3. Ha ez a \mathcal{V} Euler-vonal, akkor készen vagyunk. (Tfh. nem az.)
4. Legyen w egy olyan csúcs \mathcal{V} -n, amelyből indul „fekete” (nem \mathcal{V} -beli) él is. Mivel G összefüggő, ilyen csúcs van.

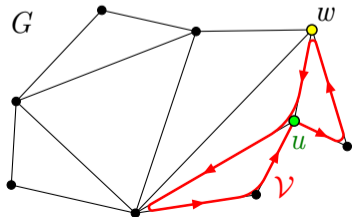


Egy tetszőleges \mathcal{V} -beli csúcsból sétáljuk el egy tetszőleges fekete élre. Tekintsük az első olyan pillanatot, amikor a „bepiroszott” élhalmazból kilépve fekete élre lépünk.

a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

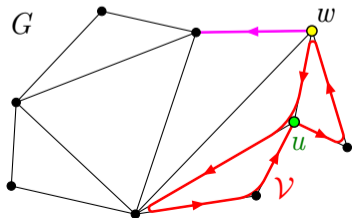
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

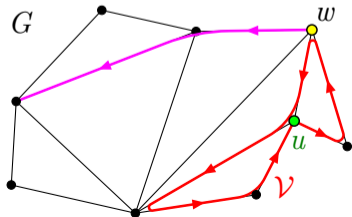
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

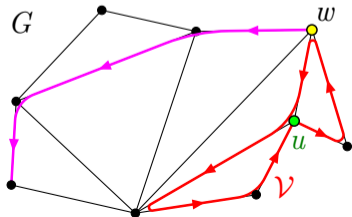
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

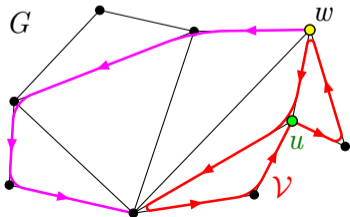
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



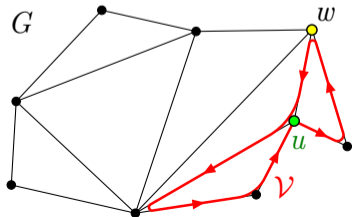
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w -ben)!

A lényeg: Elinduláskor a fekete részgráfban is minden pont foka páros. Ugyanis a \mathcal{V} zárt vonal élei által alkotott „piros” részgráfban minden pont foka páros (bemegy/kimegy...); és G -ben is páros minden fok; továbbá „páros – páros = páros”.



Azt pedig már meggondoltuk, hogy egy csupa páros fokú gráfban a mohó vonalnövelés zárt vonalat eredményez elakadáskor. (Az összefüggőség nem kellett hozzá. Ezt a fekete részgráfról nem is tudjuk.)

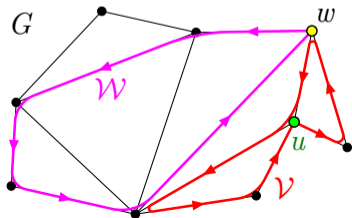
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w -ben)!

A lényeg: Elinduláskor a fekete részgráfban is minden pont foka páros. Ugyanis a \mathcal{V} zárt vonal élei által alkotott „piros” részgráfban minden pont foka páros (bemegy/kimegy...); és G -ben is páros minden fok; továbbá „páros – páros = páros”.



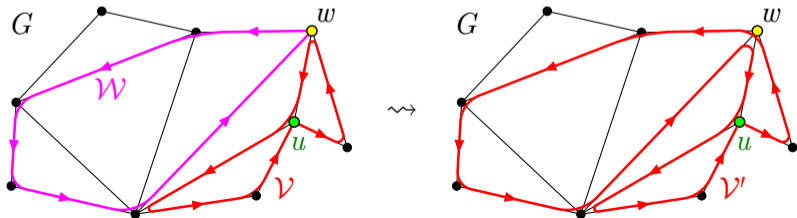
a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w -ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w -ben)!

6. Az így kapott \mathcal{W} zárt vonalat a w pontnál „betoldhatjuk” \mathcal{V} -be (lásd ábra), ezzel egy hosszabb \mathcal{V}' zárt vonalat kapunk G -ben. (A w pont választása miatt \mathcal{W} legalább egy élt tartalmaz, így \mathcal{V}' valóban hosszabb \mathcal{V} -nél.)

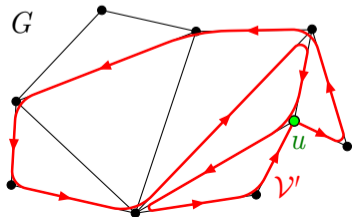


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

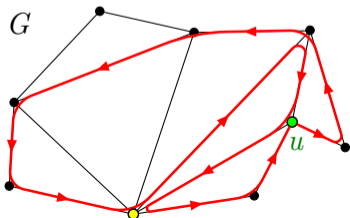


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcst is meglátogat G összefüggősége miatt.

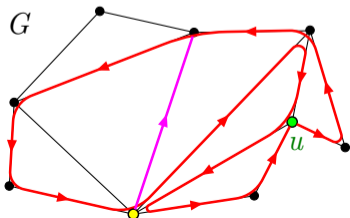


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcst is meglátogat G összefüggősége miatt.

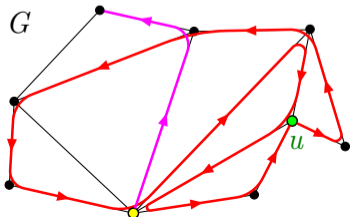


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcst is meglátogat G összefüggősége miatt.

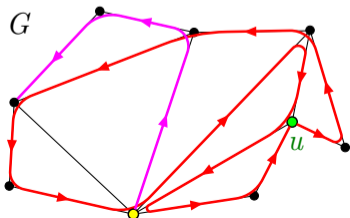


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcst is meglátogat G összefüggősége miatt.

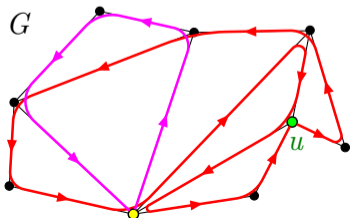


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

*: és akkor persze minden csúcst is meglátogat G összefüggősége miatt.

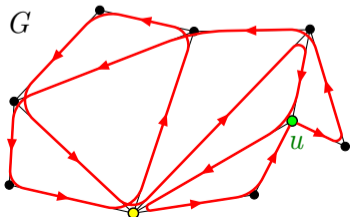


a) G -ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és \forall pont foka páros.

Bizonyítás. \Leftarrow irány, azaz a feltételek elégségessége:

7. Most **ugyanaz a szituáció** van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak \mathcal{V}' -nek hívjuk, nem \mathcal{V} -nek). Tehát ha \mathcal{V}' még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó” bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). \square

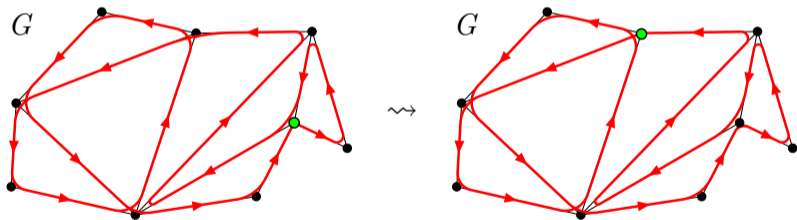
*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.



Megjegyzések. 1. Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy **algoritmust** is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

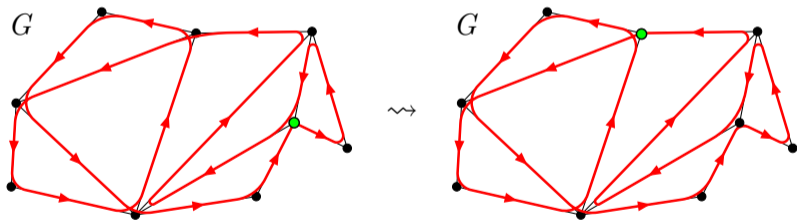
Megjegyzések. 1. Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy **algoritmust** is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

2. Egy zárt Euler-vonal kezdő/végpontjának valójában csak a formális leírásban van kitüntetett szerepe: A zárt Euler-vonal „mentén” bármely csúcsba „eltolhatjuk” a kezdő/végpontot; továbbra is zárt Euler-vonalat kapunk (lásd ábra).



Megjegyzések. 1. Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy **algoritmust** is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

2. Egy zárt Euler-vonal kezdő/végpontjának valójában csak a formális leírásban van kitüntetett szerepe: A zárt Euler-vonal „mentén” bármely csúcsba „eltolhatjuk” a kezdő/végpontot; továbbra is zárt Euler-vonalat kapunk (lásd ábra).



3. Természetesen egy gráfban létezhet több zárt Euler-vonal is (sőt, ez a jellemző, ha a gráf teljesíti a tétel feltételeit).

b) G -ben van nyílt Euler-vonal $\iff G$ összefüggő, és két páratlan fokú csúcsa van.

Bizonyítás. Az „ \implies ” irány egyszerű, az a) állításnál látottakhoz teljesen hasonló. A fokszámok paritásának vizsgálatánál azt kapjuk, hogy a nyílt Euler-vonal két (különböző) végpontjának páratlan a foka (a kiinduló és a befejező él miatt), a többi csúcs foka pedig páros.

b) G -ben van nyílt Euler-vonal $\iff G$ összefüggő, és két páratlan fokú csúcsa van.

Bizonyítás. Az „ \implies ” irány egyszerű, az a) állításnál látottakhoz teljesen hasonló. A fokszámok paritásának vizsgálatánál azt kapjuk, hogy a nyílt Euler-vonal két (különböző) végpontjának páratlan a foka (a kiinduló és a befejező él miatt), a többi csúcs foka pedig páros.

Az „ \impliedby ” irány pedig visszavezethető az a) állításra: Legyen a két páratlan fokú csúcs u és v . Húzzunk be egy új élt u és v közé. (Akkor is, ha már össze vannak kötve; ekkor párhuzamos élt hozunk létre, ami nem okoz gondot.) A kapott G' gráf nyilván összefüggő lesz, és minden pontjának foka páros lesz, így az a) állítás szerint tartalmaz egy \mathcal{V} zárt Euler-vonalat. Az általunk behúzott új él törlése után a \mathcal{V} -ből „megmaradó” vonal az eredeti G gráf egy nyílt Euler-vonalát adja. \square