Hamilton-út, Hamilton-kör. Dirac-tétel.

Kombinatorika

8. előadás

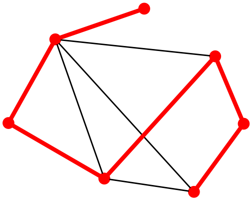
SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022. április 4.

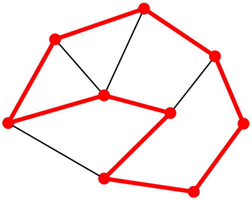
Definíció. A G gráfban egy út Hamilton-út, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör Hamilton-kör, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Példák.



Hamilton-út

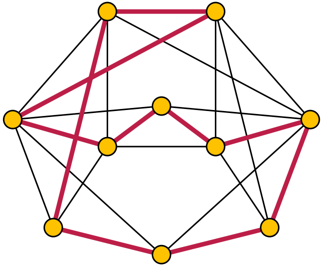


Hamilton-kör

Definíció. A G gráfban egy út Hamilton-út, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör Hamilton-kör, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Példák.



Hamilton-kör

Definíció. A G gráfban egy út Hamilton-út, ha G összes csúcsát tartalmazza (pontosan egyszer).

Definíció. A G gráfban egy kör Hamilton-kör, ha G összes csúcsát tartalmazza.

Megjegyzés. Sajnos nem ismert hatékony algoritmus vagy „szép" tétel annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Hamilton-út / Hamilton-kör. (Az a sejtés, hogy ilyen nem is létezik.)

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor" állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n-re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$-nél.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n-re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$-nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G-ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási” fokszámokból sem.

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor'' állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n-re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$-nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G-ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási'' fokszámokból sem.

2/b. A $|V| \geq 3$ feltétel sem hagyható el: K_2-ben minden pont foka legalább $|V|/2$, de nincs a gráfban Hamilton-kör.

K_2

Dirac-tétel. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzések.

1. Ez NEM „akkor és csak akkor” állítás! Például a C_n kör-gráf mutatja (nagy n-re), hogy akkor is lehet Hamilton-kör egy gráfban, ha a fokok jóval kisebbek $n/2$-nél.

2/a. Nyilván nem lenne igaz a tétel, ha nem követelnénk meg G-ről, hogy egyszerű legyen. Ha megengedünk hurokéleket / párhuzamos éleket, akkor még az összefüggőség sem következik „óriási” fokszámokból sem.

2/b. A $|V| \geq 3$ feltétel sem hagyható el: K_2-ben minden pont foka legalább $|V|/2$, de nincs a gráfban Hamilton-kör.

2/c. Az $n/2$ korlát nem javítható (csökkenthető) a tételben, ezt például a $K_{n/2} \dot\cup K_{n/2}$ gráf mutatja (páros n-re).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \Longrightarrow G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető" (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel" előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

2 pontú út $\rightsquigarrow$ 3 pontú út $\rightsquigarrow$ 4 pontú út $\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow$ n pontú út (= Ham.-út)

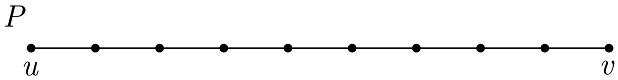
G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető" (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel" előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

Vegyünk G-ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

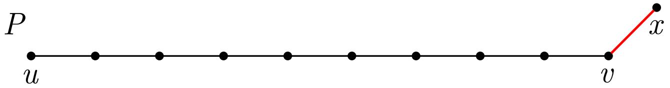
Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető" (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel" előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

Vegyünk G-ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.

1. eset („mohó útnövelés"): Ha a P út v végpontjából vezet él P-n kívüli pontba, akkor ezt a külső pontot (az összekötő éllel együtt) P-hez hozzávéve hosszabb utat kapunk. ✓



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

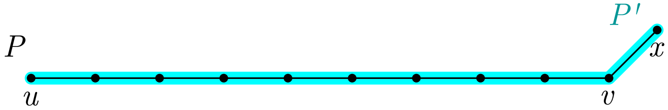
Bizonyítás. Legyen $|V(G)| = n$.

1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

Megmutatjuk, hogy G minden olyan útja, ami nem Hamilton-út, „növelhető" (található nála 1 éllel hosszabb út). Így egy tetszőleges útból – például egy élből – kiindulva ezen „növelésekkel" előbb-utóbb Hamilton-úthoz jutunk.

Vegyünk G-ben egy tetszőleges P utat, ami nem Hamilton-út.

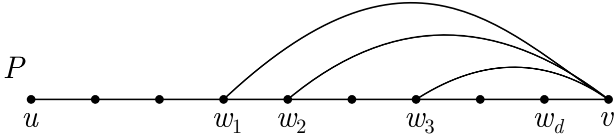
1\. eset („mohó útnövelés"): Ha a P út v végpontjából vezet él P-n kívüli pontba, akkor ezt a külső pontot (az összekötő éllel együtt) P-hez hozzávéve hosszabb utat kapunk. $\checkmark$



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

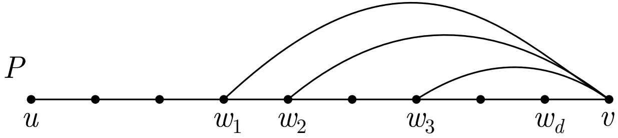
Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

2. eset („csavart útnövelés"): Ha v összes szomszédja P-n van...



G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van...

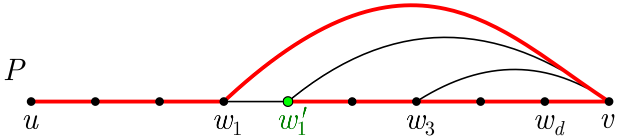


Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \rightarrow v \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i'$ út ilyen, ahol w_i' a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

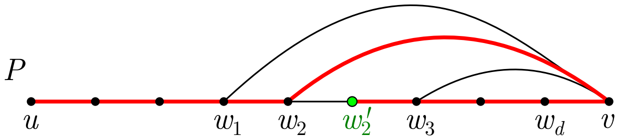
2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van…



Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \to v \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i'$ út ilyen, ahol w_i' a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

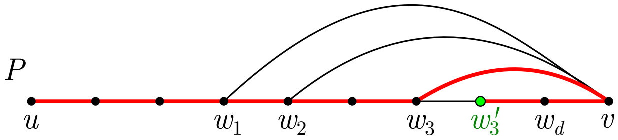
Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés"): Ha v összes szomszédja P-n van...



Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \to v \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i'$ út ilyen, ahol w_i' a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

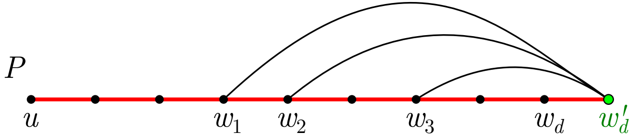
Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van...



Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \to v \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i'$ út ilyen, ahol w_i' a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

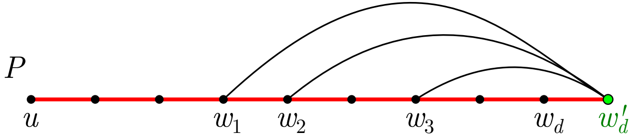
Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van...



Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \to v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van...



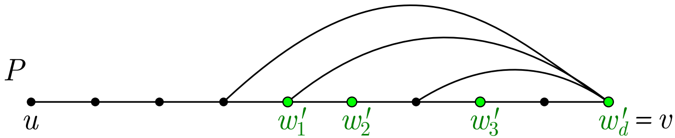
Ezen az ábrán több olyan u-ból induló utat is látunk, amely ugyanazokat a pontokat járja be, mint P (így ugyanolyan hosszú is): v minden w_i szomszédjára az $u \overset{P}{\rightsquigarrow} w_i \to v \overset{P}{\rightsquigarrow} w'_i$ út ilyen, ahol w'_i a w_i után következő pont P-n v irányába (lásd ábra).

Ezeket az utakat a későbbiekben úgy fogjuk emlegetni, hogy csavart utak. (P maga is egy csavart út.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van...

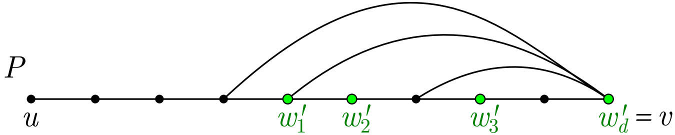


$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w_1', \ldots, w_d'$

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*

2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van...



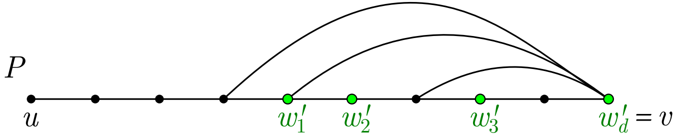
$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w'_1, \ldots, w'_d$

(Ebben a bizonyításban olyankor használjuk G egyszerűségét, amikor megállapítjuk, hogy a „szomszédok száma = fokszám''. Ezt nem hangsúlyozzuk többet.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

2. eset („csavart útnövelés''): Ha v összes szomszédja P-n van...



$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w_1', \ldots, w_d'$

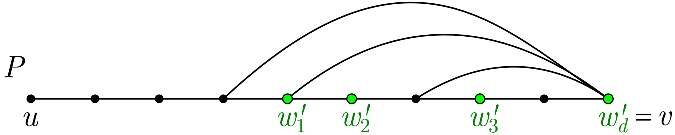
$d(v) \geq n/2 \implies$ Ez legalább $n/2$ csavart út, illetve végpont.

(Az ábrán ez nem teljesül, ezt nem szemlélteti.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

2. eset („csavart útnövelés"): Ha v összes szomszédja P-n van...



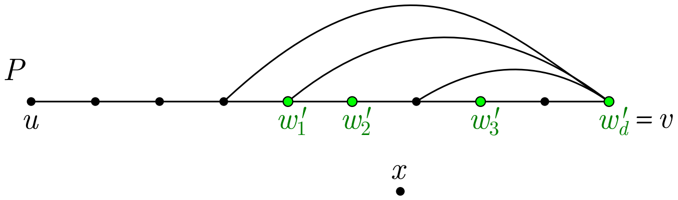
$d(v)$ darab csavart út van, $d(v)$ különböző végponttal: $w_1', \ldots, w_d'$

$d(v) \geq n/2 \implies$ Ez legalább $n/2$ csavart út, illetve végpont.

A lényeg: E sok csavart út közül valamelyik már meghosszabbítható egy „külső" pontba az 1. esetben látott módon.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van...

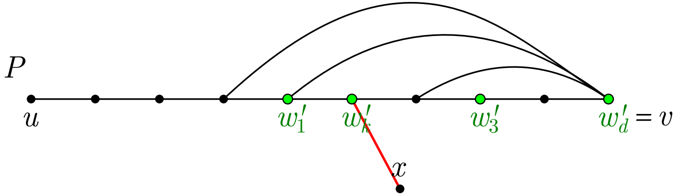


Ehhez vegyünk egy tetszőleges P-n kívüli x pontot G-ben.
(P nem Hamilton-út, így ilyen x van.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*

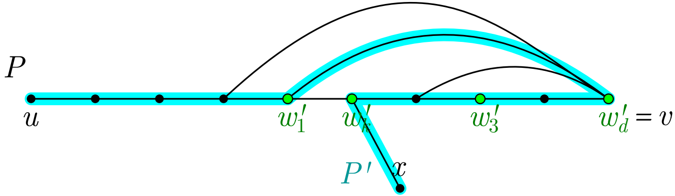
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van...



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P-n kívüli x pontot G-ben. Láttuk, hogy a w_i' csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w_k' végponttal†.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 1. *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-út:*
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van…

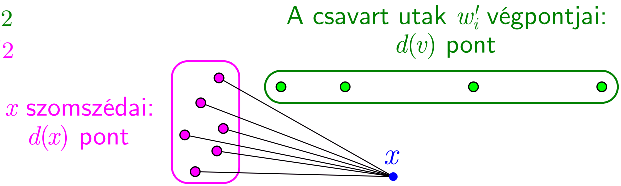


Ehhez vegyünk egy tetszőleges P-n kívüli x pontot G-ben. Láttuk, hogy a w_i' csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w_k' végponttal†. A w_k'-be vezető csavart utat x-be meghosszabbítva egy P-nél (1 éllel) hosszabb utat kapunk. ✓

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. **1.** *Először belátjuk, hogy G-ben van Hamilton-<u>út</u>:*
2. eset („csavart útnövelés”): Ha v összes szomszédja P-n van...

$d(v) \geq n/2$
$d(x) \geq n/2$



Ehhez vegyünk egy tetszőleges P-n kívüli x pontot G-ben. Láttuk, hogy a w_i' csavart-út-végpontok száma legalább $n/2$, és feltételeinkből x foka is legalább $n/2$, ezért x biztosan össze van kötve valamely w_k' végponttal†. A w_k'-be vezető csavart utat x-be meghosszabbítva egy P-nél (1 éllel) hosszabb utat kapunk. ✓

† **indoklása**: Ahhoz, hogy a w_i' végpontok, x szomszédai és x csupa különböző pontok legyenek, legalább $n/2 + n/2 + 1 = n + 1$ pont kellene.

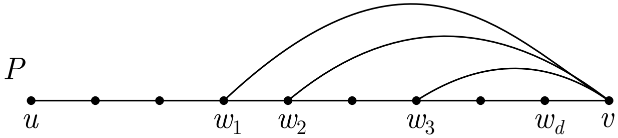
G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



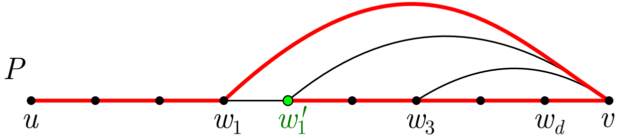
P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

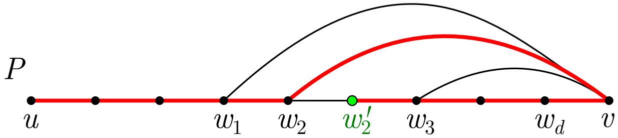
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

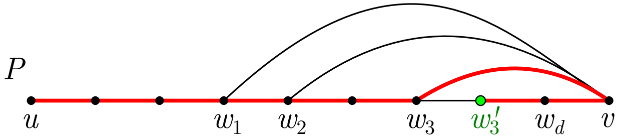
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

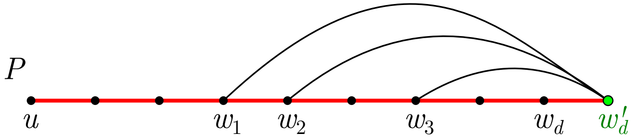
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

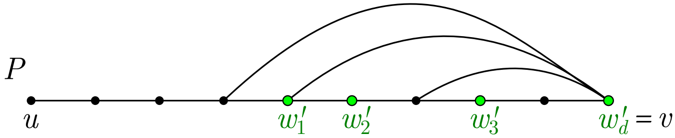
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



P tartalmazza G összes pontját, így v szomszédai P-n vannak.

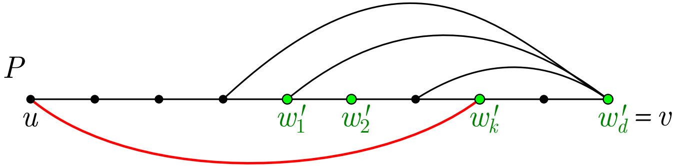
(Újrahasznosítjuk az előző ábrát és jelöléseket, de ez egy másik eset!)

P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



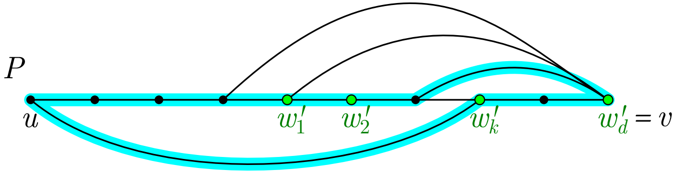
P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

Mivel $d(u) \geq n/2$, ezért u-ból vezet él valamelyik csavart Hamilton-út w'_k végpontjába. (Az indoklás ugyanaz, mint előbb, csak x helyett u-val.)

G egyszerű, $|V| \geq 3$, minden fok $\geq \frac{|V|}{2} \implies G$-ben van Ham.-kör.

Bizonyítás. 2. *G-ben van Hamilton-kör is.*

Az eddigiekből már tudjuk, hogy G-ben van egy P Hamilton-út.



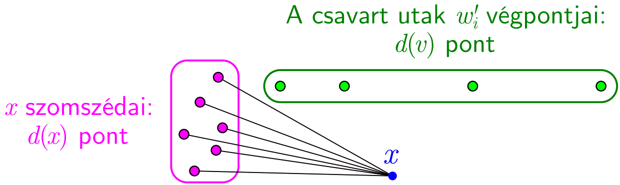
P „csavarásai" most $d(v) \geq n/2$ darab u-ból induló, csupa különböző végpontú Hamilton-utat adnak G-ben.

Mivel $d(u) \geq n/2$, ezért u-ból vezet él valamelyik csavart Hamilton-út w'_k végpontjába. (Az indoklás ugyanaz, mint előbb, csak x helyett u-val.) Ez az uw'_k él a megfelelő csavart Hamilton-utat Hamilton-körré zárja be. (Mivel $n \geq 3$, az uw'_k él nem a csavart Hamilton-út éle, tényleg körré zárja azt be.) $\square$

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors algoritmus is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors algoritmus is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

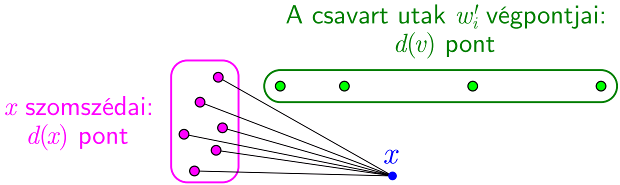
Egy általánosítás. A bizonyítás kielemzése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$” feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárokra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.



Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors algoritmus is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemzése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$" feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárokra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárokra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás.



Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors algoritmus is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemzése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$" feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárokra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárokra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás. Ebből adódik a Dirac-tétel következő általánosítása:

Ore-tétel*. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban bármely két nem összekötött csúcs fokszámának összege legalább n, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzés. A bizonyítás alapján egy gyors algoritmus is készíthető egy Hamilton-kör megtalálására, **amennyiben** a gráfunkra teljesülnek a Dirac-tétel feltételei.

Egy általánosítás. A bizonyítás kielemzése azt mutatja, hogy a „minden fokszám legalább $n/2$" feltételt mindig csak arra használtuk, hogy bizonyos számunkra fontos x, v pontpárokra elmondhassuk, hogy $d(x) + d(v) \geq n$.

A még részletesebb analízis (és a Hamilton-körös 2. rész apró ésszerűsítése) azt adja, hogy a fenti egyenlőtlenséget elég nem összekötött pontpárokra tudnunk ahhoz, hogy működjön a bizonyítás. Ebből adódik a Dirac-tétel következő általánosítása:

Ore-tétel*. Ha az $n(\geq 3)$ pontú G egyszerű gráfban bármely két nem összekötött csúcs fokszámának összege legalább n, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzés. Az Ore-tételből következik a Dirac-tétel.