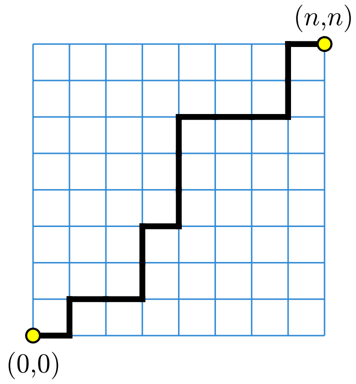
A Catalan-számok zárt alakjának elemi bizonyítása

Tétel. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

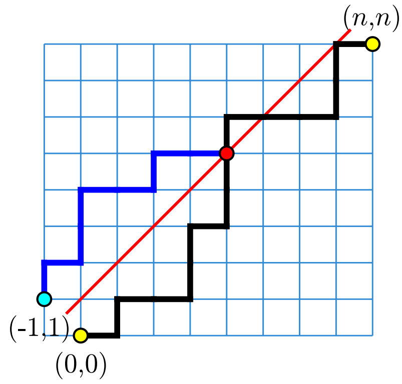
Bizonyítás. (Vázlat.) Előadáson láttuk, hogy a C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat a négyzetrácson, amelyekben csak $(1,0)$ és $(0,1)$ lépések szerepelnek, és soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (A két megengedett lépést $\to$ és $\uparrow$ nyilakkal fogjuk jelölni.) A tétel bizonyításához tehát azt kell belátni, hogy ezen utak száma $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Az összes $\to$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utak száma $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$, mert az n darab $\to$ és az n darab $\uparrow$ lépés tetszőleges sorrendben következhet egymás után.



1. ábra: Az „összes” út összeszámlálása.

Ezen utak közül összeszámlálási feladatunk szempontjából azok a rosszak, amelyek az $y = x$ egyenes fölé lépnek, azaz amelyek *rálépnek az* $y = x + 1$ *egyenesre*. A rossz utak száma megegyezik a $\to$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(-1,1) \rightsquigarrow (n,n)$ utak számával: Ha minden ilyen rossz útnak tekintjük az első $y = x + 1$ egyenesre eső pontját, és az addig a pontig tartó útszakaszt tükrözzük az $y = x + 1$ egyenesre (a $\to$ és $\uparrow$ lépések felcserélésével), továbbá az út többi részét változatlanul hagyjuk, akkor ezzel bijekciót létesítünk a rossz utak halmaza és a $(-1,1) \rightsquigarrow (n,n)$ utak halmaza között. (Miért?) Ezt szemlélteti a 2. ábra: Feketével egy rossz utat jelöltünk, kékkel pedig a tükrözött útszakaszt; a transzformáció után kapott $(-1,1) \rightsquigarrow (n,n)$ út a kék útszakaszból és az azt követő fekete útszakaszból tevődik össze.



2. ábra: Egy „rossz” út transzformációja.

Az $\to$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(-1,1) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat (és így a rossz utakat) a fentiekhez hasonlóan könnyű összeszámolni: $n+1$ darab $\to$ és $n-1$ darab $\uparrow$ lépés állhat egymás után tetszőleges sorrendben, így ezen utak száma $\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

Az $y = x$ egyenes fölé nem lépő „jó” $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utak száma tehát

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

és ezzel kiszámoltuk a C_n Catalan-szám zárt alakját. $\square$