Logikai szita
(tartalmazás és kizárás elve)

Kombinatorika

5. előadás

SZTE Bolyai Intézet

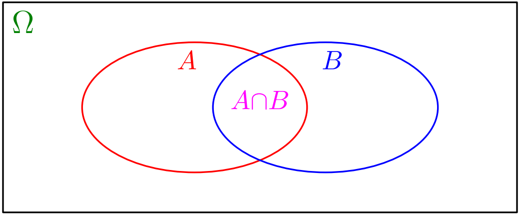
Szeged, 2021.

Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

Ω: az osztály tanulóinak halmaza (az alaphalmaz)
A: a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)
B: a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

Ismert: $|\Omega| = 30, \quad |A| = 12, \quad |B| = 14, \quad |A \cap B| = 5.$

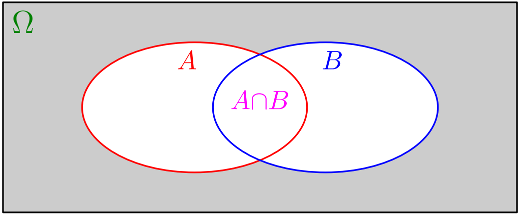


Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

Ω: az osztály tanulóinak halmaza (az alaphalmaz)
A: a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)
B: a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

Ismert: $|\Omega| = 30, \quad |A| = 12, \quad |B| = 14, \quad |A \cap B| = 5.$

Kérdés: $\left|\overline{A \cup B}\right| = ?$ $\leftarrow$ itt és a továbbiakban $\overline{H} := \Omega \setminus H$

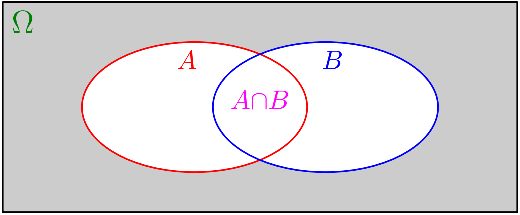


Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

Ω: az osztály tanulóinak halmaza (az alaphalmaz)
A: a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)
B: a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

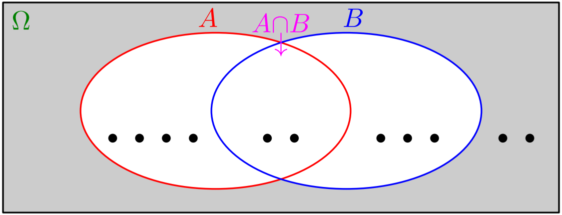
Ismert: $|\Omega| = 30, \quad |A| = 12, \quad |B| = 14, \quad |A \cap B| = 5.$

Kérdés: $\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B| = 9.$ $\square$



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

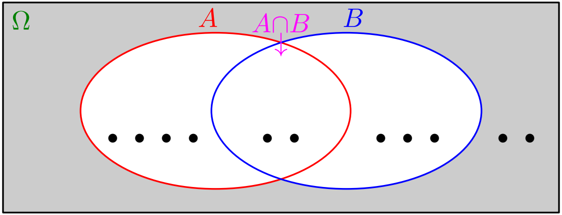
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

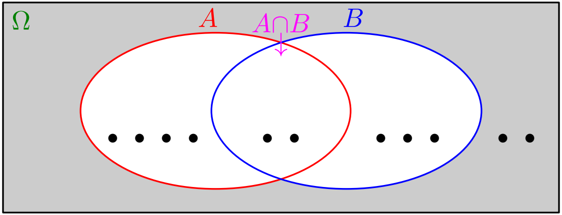
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg."



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

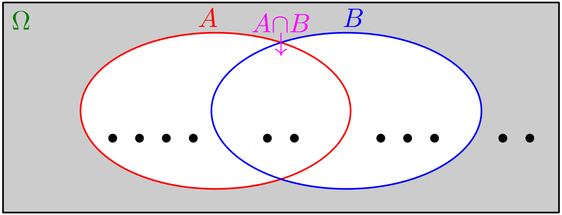
Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg." De mit is jelent ez?



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

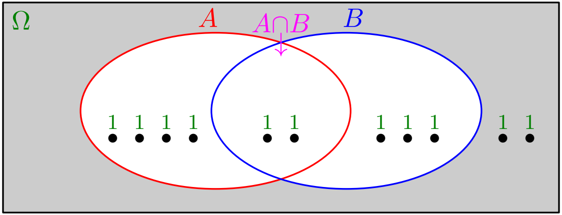
Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg." De mit is jelent ez?

$$|H| = \sum_{h \in H} 1$$



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

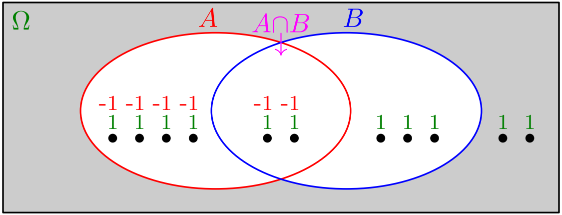
Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?
Írjunk egy 1-est Ω minden elemére,



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire,

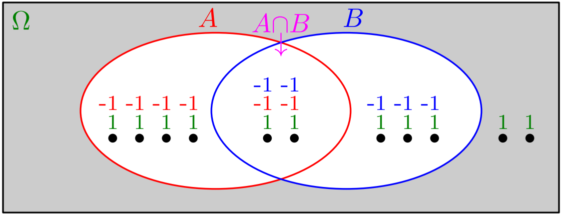


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

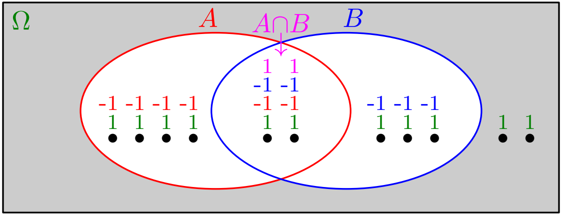
Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire, (-1)-eket B elemeire,



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

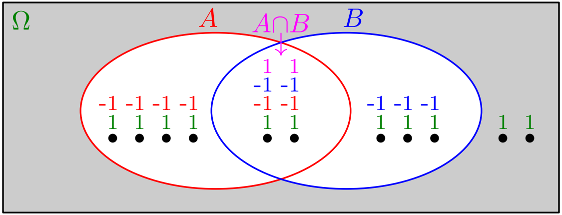
Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?
Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire, (-1)-eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire.



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?
Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire, (-1)-eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként” számolva).



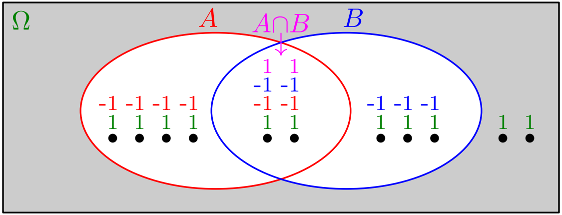
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire, (-1)-eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként” számolva).

Ha elemenként csoportosítva adjuk össze ezeket a számokat, akkor pedig a bal oldal adódik, mivel

$$\text{egy } x \in \Omega \text{ elemre írt számok összege} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{A \cup B} \\ 0, & \text{ha } x \in A \cup B. \end{cases}$$

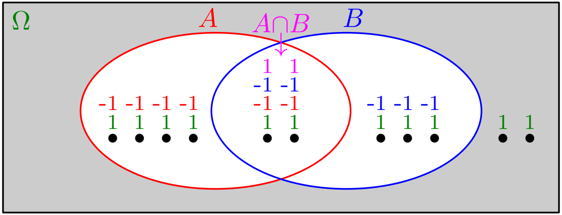


$$\left|\overline{A \cup B}\right| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1)-eket A elemeire, (-1)-eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként" számolva).
Ha elemenként csoportosítva adjuk össze ezeket a számokat, akkor pedig a bal oldal adódik, mivel

$$\text{egy } x \in \Omega \text{ elemre írt számok összege} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{A \cup B} \\ 0, & \text{ha } x \in A \cup B. \end{cases}$$

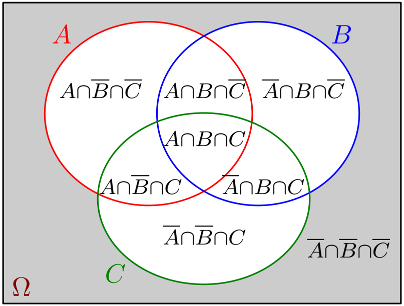
Az utolsó állítás 4 eset végiggondolásával ellenőrizhető: Csak az számít, hogy x az $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ és $A \cap B$ „cellák" közül melyikbe esik. $\square$



Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella” lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) $\square$



Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella'' lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) □

Már megbeszéltük, hogy mit értünk azon, hogy egy elemet valahányszor megszámol a jobb oldal: az adott elemhez tartozó ± 1-ek összegét (ahol a ± 1-eket az előző bizonyításban látott módon osztjuk ki a jobb oldalon szereplő halmazok elemeire).

Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella" lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) $\square$

Próbáljuk meg ábra nélkül is végiggondolni, hogy az egyes „cellák" elemeit a jobb oldal hányszor számolja meg, és ehhez mely tagokat (halmazokat) kell figyelembe venni.

Például: „$A \cap B \cap \overline{C}$ cella elemei" $\equiv$ „azon elemek, amelyek A-nak és B-nek elemei, C-nek pedig nem" ...

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\ \ \vdots \\
&+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned}|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\ \ \vdots \\ &+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Vagyis az alaphalmaz elemszámából kivonjuk az „egyhalmazos” metszetek elemszámait, majd hozzáadjuk a „kéthalmazos” metszetek elemszámait, kivonjuk a „háromhalmazos” metszetek elemszámait, és így tovább, végül vesszük az összes halmaz („n-halmazos”) metszetének elemszámát a megfelelő előjellel.

„$\binom{n}{0}$ tag” $-$ „$\binom{n}{1}$ tag” $+$ „$\binom{n}{2}$ tag” $- \cdots \pm$ „$\binom{n}{n}$ tag”

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}| = {} & |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_n| \\
& + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
& \ \vdots \\
& + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Tehát az összes lehetséges módon összemetszünk valahány A_i halmazt (a 0-tagú metszetnek az Ω felel meg), és a jobb oldalon az ilyen metszetek elemszámai jelennek meg: $+$ előjellel, ha páros sok halmazt metszettünk össze, $-$ előjellel, ha páratlan sokat:

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}| = {} & |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_n| \\
& + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
& \ \vdots \\
& + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Tehát az összes lehetséges módon összemetszünk valahány A_i halmazt (a 0-tagú metszetnek az Ω felel meg), és a jobb oldalon az ilyen metszetek elemszámai jelennek meg: $+$ előjellel, ha páros sok halmazt metszettünk össze, $-$ előjellel, ha páratlan sokat:

Tétel (tömör alak). Tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti formulában $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \Omega$ értendő.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

1. típus:

Ha $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$, akkor x-et csak az $|\Omega|$ tag számolja meg ($+1$ előjellel), és így összességében 1-szer számoljuk meg. ✓

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

1. típus:

Ha $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$, akkor x-et csak az $|\Omega|$ tag számolja meg $(+1$ előjellel), és így összességében 1-szer számoljuk meg. ✓

Hiszen ha $x \in \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$, azaz ha x egyik A_i halmaznak sem eleme, akkor természetesen nem eleme egyik $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}$ alakú metszetnek sem $(m \geq 1)$. Tehát az $|\Omega|$ tagon kívül más valóban nem számolja meg x-et.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

1. Ha a metszet minden tagját az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok közül választjuk, akkor a metszetnek eleme lesz x, hiszen mindegyik kiválasztott halmaznak is eleme. ($I = \emptyset$ is rendben van.)

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et $(s \geq 1)$, a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

2. Ha a metszet tagjai között szerepel olyan A_k tag, amely nem az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok közül való (tehát $k \notin \{j_1, \ldots, j_s\}$), akkor x nyilván nem lesz eleme a metszetnek, mert már A_k-nak sem az.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots , A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x-et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1)-szer, ha ez a szám ptlan.

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x-et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1)-szer, ha ez a szám ptlan. Ezek a ± 1-ek 0-vá összegződnek, mert ugyanannyiféleképpen lehet az A_{j_*} halmazok közül páros sokat összemetszeni, mint páratlan sokat. ✓ $\square$

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ rögzített. Tfh az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ halmazok azok, amelyek tartalmazzák x-et $(s \geq 1)$, a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x.

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\cap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x, amelyeknek minden tagja $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \ldots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x-et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1)-szer, ha ez a szám ptlan. Ezek a ± 1-ek 0-vá összegződnek, mert a nemüres $\{j_1, \ldots, j_s\}$ indexhalmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ptlan elemszámú. ✓ □

Tulajdonképpen a következőt igazoltuk az előző bizonyításban:

$$\begin{aligned}\vec{\chi}_{\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}} = {} & \vec{\chi}_\Omega - \vec{\chi}_{A_1} - \vec{\chi}_{A_2} - \ldots - \vec{\chi}_{A_n} \\ & + \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2)} + \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_3)} + \ldots + \vec{\chi}_{(A_{n-1} \cap A_n)} \\ & - \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} - \ldots - \vec{\chi}_{(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)} \\ & \quad \vdots \\ & + (-1)^n \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)},\end{aligned}$$

ahol $\vec{\chi}$ a karakterisztikus vektort jelöli.

Ekvivalens alak. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\ \ \vdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Ekvivalens alak. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\ \ \vdots \\ &+ (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Bizonyítás. $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |\Omega| - \left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = \ldots$

A fenti alakhoz jutunk, ha a már bizonyított szita formula szerint kifejezzük $\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right|$-ot. $\square$