

FORMÁLIS HATVÁNSOROK MŰVELETI TULAJDONSÁGAI

ISMÉTLÉS. A polinomokra is teljesülnek az 1. és 2. pontbeli műveleti tulajdonságok (vö. a polinomok is formális hatványsorok).

1. ALAPTULAJDONSÁGOK. Tetszőleges $F, G, H \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorokra fennállnak a következők:

- (i) $(F + G) + H = F + (G + H),$
- (ii) $F + G = G + F,$
- (iii) $F + 0 = F,$
- (iv) $F + (-F) = 0,$ ahol $-F := (-1)F,$
- (v) $(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H),$
- (vi) $F \cdot G = G \cdot F,$
- (vii) $1 \cdot F = F,$
- (viii) $(F + G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H.$

Későbbi algebrai tanulmányok után a fenti műveleti tulajdonságokat úgy foglalhatjuk össze, hogy a (valós együtthatós) formális hatványsorok $\mathbb{R}[[x]]$ halmaza az előadáson definiált összeadás és szorzás műveletekkel *kommutatív egységelemes gyűrűt* alkot.

2. TÖBBTÉNYEZŐS SZORZAT. Több formális hatványsort a polinomoknál megismert módon is összeszorozhatunk: „Minden tagot minden taggal összeszorozunk, majd az azonos kitevőjű monomokat összegyűjtjük és összeadjuk.” Precízen fogalmazva, tetszőleges $F_1, \dots, F_d \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén

$$[x^n](F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_d) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_d = n \\ k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}}} ([x^{k_1}]F_1)([x^{k_2}]F_2) \dots ([x^{k_d}]F_d).$$

3. AZ OSZTÁS TULAJDONSÁGAI. A következő azonosságokat úgy kell érteni, hogy „ha a bal oldal értelmezve van, akkor a jobb oldal is, és a két oldal egyenlő” ($A, B, C, D \in \mathbb{R}[[x]]$):

- (i) $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC},$
- (ii) $\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C},$
- (iii) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$

4. A KOMPOZÍCIÓ TULAJDONSÁGAI. Tetszőleges $F, G, H \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén (ha mindkét oldal értelmezve van, akkor)

- (i) $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H),$
- (ii) $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H),$
- (iii) $\left(\frac{F}{G}\right) \circ H = \frac{F \circ H}{G \circ H},$
- (iv) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$

5. A DERIVÁLÁS TULAJDONSÁGAI. Tetszőleges $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok (és értelmezett bal oldal) esetén

- (i) $(F + G)' = F' + G',$
- (ii) $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G',$
- (iii) $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F' \cdot G - F \cdot G'}{G^2},$
- (iv) $(F \circ G)' = (F' \circ G) \cdot G'.$