Polinom/polinom alakú hatványsorok együtthatói

Kombinatorika

6. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2019.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{3}x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n x^n$$

A számlálóból és a nevezőből is kiemeljük a konstans tagot, hogy $\dfrac{1}{1-rx}$ alakú törtet kapjunk.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\frac{2}{3-7x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{3}x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n x^n$$

$$\frac{4}{5+2x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{5}x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}x\right)} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n$$

Így minden $\dfrac{p}{q+rx}$ alakú hatványsor együtthatóit meg tudjuk határozni.

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Lásd $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok generátorfüggvénye.

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

1. bizonyítás: $\left(\!\binom{2}{n}\!\right) = \binom{n+1}{1} = n+1.$ $\square$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

1. bizonyítás: $\left(\!\binom{2}{n}\!\right) = \binom{n+1}{1} = n+1.$ $\square$

2. bizonyítás: Végezzük el az

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

kéttényezős szorzást. $\square$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

3. bizonyítás: Ha deriváljuk az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

egyenlőség mindkét oldalát, akkor a bizonyítandót kapjuk. A bal oldalt mint hányadost deriváljuk:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1' \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{0-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad \square$$

Ha a nevezőben egy elsőfokú polinom hatványa szerepel:

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Speciális eset:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

4. bizonyítás: Newton-formulával (kiegészítő anyag):

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

mert

$$(-1)^n \binom{-2}{n} = (-1)^n \frac{(-2)(-3)(-4)\dots(-n-1)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

$\square$

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtthatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{2}x\right)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtthatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{2}x\right)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

Mi a helyzet általában az A/B alakú hatványsorokkal, ahol A és B polinomok?

$$\frac{1}{(1-x)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{d}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} x^n$$

Ebből minden $\frac{p}{(q+rx)^d}$ alakú hatványsor (ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$) együtthatóit ki tudjuk számolni kiemelés után:

$$\frac{5}{(2-7x)^3} = \frac{5}{2^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{2}x\right)^3} = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n.$$

Mi a helyzet általában az A/B alakú hatványsorokkal, ahol A és B polinomok?

Ha A-t maradékosan osztjuk B-vel (polinomosztással), akkor a

$$\frac{A}{B} = A_1 + \frac{A_2}{B}$$

alakhoz jutunk, ahol A_1 és A_2 polinomok, továbbá A_2 foka kisebb, mint B foka. Ezért elég olyan polinom/polinom hatványsorokkal foglalkozni, amikor a számláló foka kisebb, mint a nevezőé.

Ha a nevező több tényező szorzata, akkor a racionális törtfüggvények integrálásánál látott módon „parciális törtekre bontunk”:

$$\frac{1-11x}{(1+x)(1-2x)} = \frac{4}{1+x} - \frac{3}{1-2x} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (4\cdot(-1)^n - 3\cdot 2^n)x^n.$$

Ha a nevező több tényező szorzata, akkor a racionális törtfüggvények integrálásánál látott módon „parciális törtekre bontunk”:

$$\frac{1-11x}{(1+x)(1-2x)} = \frac{4}{1+x} - \frac{3}{1-2x} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = $$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(4\cdot(-1)^n - 3\cdot 2^n\right)x^n.$$

$$\frac{3+x}{(-1+x)(1+x)(5+x)} = \frac{1/3}{-1+x} + \frac{-1/4}{1+x} + \frac{1/12}{5+x} = \ldots$$

$$\frac{13+23x+16x^2+4x^3}{(1+x)^3(2+x)} = \frac{3}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{2+x} = \ldots$$

$$\frac{16}{(-1+x)^2(1+x)^3} = \frac{-3}{-1+x} + \frac{2}{(-1+x)^2} + \frac{3}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{4}{(1+x)^3}.$$

$$\frac{1-11x}{(1+x)(1-2x)} = \frac{4}{1+x} - \frac{3}{1-2x} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (4\cdot(-1)^n - 3\cdot 2^n)x^n.$$

$$\frac{3+x}{(-1+x)(1+x)(5+x)} = \frac{1/3}{-1+x} + \frac{-1/4}{1+x} + \frac{1/12}{5+x} = \ldots$$

$$\frac{13+23x+16x^2+4x^3}{(1+x)^3(2+x)} = \frac{3}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{2+x} = \ldots$$

$$\frac{16}{(-1+x)^2(1+x)^3} = \frac{-3}{-1+x} + \frac{2}{(-1+x)^2} + \frac{3}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{4}{(1+x)^3}.$$

Mivel polinom/polinom alakú formális hatványsorokkal ugyanúgy kell számolni, mint racionális törtfüggvényekkel, ezért a kalkulusból tanult parciális törtekre bontás tétele igaz polinom/polinom hatványsorokra is. (Az ott látott módszerrel el is tudjuk végezni a parciális törtekre bontást.)

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B=(p_1+q_1x)^{d_1}(p_2+q_2x)^{d_2}\cdots(p_k+q_kx)^{d_k},$$

ahol $p_i,q_i\in\mathbb{R}$, $d_i\in\mathbb{N}^+$, továbbá egyik (p_i+q_ix) tényező sem skalárszorosa másik (p_j+q_jx)-nek (ha $i\neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j}\in\mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B}=&\frac{r_{1,1}}{p_1+q_1x}+\frac{r_{1,2}}{(p_1+q_1x)^2}+\cdots+\frac{r_{1,d_1}}{(p_1+q_1x)^{d_1}}+\\&+\frac{r_{2,1}}{p_2+q_2x}+\frac{r_{2,2}}{(p_2+q_2x)^2}+\cdots+\frac{r_{2,d_2}}{(p_2+q_2x)^{d_2}}+\\&\vdots\\&+\frac{r_{k,1}}{p_k+q_kx}+\frac{r_{k,2}}{(p_k+q_kx)^2}+\cdots+\frac{r_{k,d_k}}{(p_k+q_kx)^{d_k}}.\end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1}(p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

Ebben a prezentációban egy polinom fokán mindig a hagyományos értelemben vett fokszámát értjük, nem a formális hatványsoroknál bevezetett (kezdő)fokot.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1}(p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

1. megjegyzés: Az $\frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}$ parciális törtek együtthatóit a korábbiak alapján ki tudjuk számolni, így A/B együtthatóit is.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

1. megjegyzés: Az $\frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}$ parciális törtek együtthatóit a korábbiak alapján ki tudjuk számolni, így A/B együtthatóit is.

2. megjegyzés: A tételben szereplő $r_{i,j}$ számok egyértelműen meghatározottak.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

3. megjegyzés: A B tényezőire vonatkozó feltétel úgy is megfogalmazható, hogy további tényezőket már nem lehet „összevonni" a nevezőben.

Például $\dfrac{1}{(3-4x)(6-8x)}$-re most $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(3-4x)^2}$-ként kell tekinteni.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

4. megjegyzés: Ha a komplex számtest felett dolgozunk (és a tételben $\mathbb{R}$-et $\mathbb{C}$-re cseréljük), akkor az algebra alaptétele szerint B mindig lineáris tényezők szorzatára bomlik. $\mathbb{R}$ felett sajnos nem ez a helyzet, így amíg nem ismerjük a komplex számokat, ez a módszer nem mindig alkalmazható, csak bizonyos B-kre.

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

4. megjegyzés:

$$\frac{3+x}{1-2x+2x^2} = ?$$

Komplex számok nélkül itt elakadtunk. :(

Parciális törtekre bontás (spec. eset). Legyenek A és B olyan polinomok, amelyekre A foka $<$ B foka. Tegyük fel, h.

$$B = (p_1 + q_1 x)^{d_1} (p_2 + q_2 x)^{d_2} \cdots (p_k + q_k x)^{d_k},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, továbbá egyik $(p_i + q_i x)$ tényező sem skalárszorosa másik $(p_j + q_j x)$-nek (ha $i \neq j$). Ekkor A/B a következő alakba írható alkalmas $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ konstansokkal:

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{r_{i,j}}{(p_i + q_i x)^j}.$$

4. megjegyzés:

$$\frac{3+x}{1-2x+2x^2} = \frac{3/2-2i}{1-(1+i)x} + \frac{3/2+2i}{1-(1-i)x} = \ldots$$

Komplex számok körébe kilépve nem, mert ott a nevező szorzattá alakítható: $1-2x+2x^2 = (1-(1+i)x)(1-(1-i)x)$.