Permutációk paritása
(páros és páratlan permutációk)

Kombinatorika

Kiegészítő anyag

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2016.

Megállapodás. Ebben a segédanyagban az $[n] \to [n]$ bijekciókat mindig permutációknak nevezzük, akkor is, amikor sorbaállításként tekintünk rájuk. (Nem szokás azt mondani, hogy „páros sorbaállítás".) Az $[n]$ halmaz permutációit S_n-nel jelöljük.

Megállapodás. Ebben a segédanyagban az $[n] \to [n]$ bijekciókat mindig permutációknak nevezzük, akkor is, amikor sorbaállításként tekintünk rájuk. (Nem szokás azt mondani, hogy „páros sorbaállítás”.) Az $[n]$ halmaz permutációit S_n-nel jelöljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Megállapodás. Ebben a segédanyagban az $[n] \to [n]$ bijekciókat mindig permutációknak nevezzük, akkor is, amikor sorbaállításként tekintünk rájuk. (Nem szokás azt mondani, hogy „páros sorbaállítás".) Az $[n]$ halmaz permutációit S_n-nel jelöljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Megállapodás. Ebben a segédanyagban az $[n] \to [n]$ bijekciókat mindig permutációknak nevezzük, akkor is, amikor sorbaállításként tekintünk rájuk. (Nem szokás azt mondani, hogy „páros sorbaállítás”.) Az $[n]$ halmaz permutációit S_n-nel jelöljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg."

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg.”

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére” az elemeket:

341625

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az $123\ldots\mathtt{n}$ identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg.”

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére” az elemeket:

$$\overset{\downarrow}{3}4\overset{\downarrow}{1}625 \to 143625$$

Az ‘1’ elemet a helyére cseréljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg."

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére" az elemeket:

$$341625 \to 1\overset{\downarrow}{4}36\overset{\downarrow}{2}5 \to 123645$$

A '2' elemet a helyére cseréljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az $123\ldots\mathtt{n}$ identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg."

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére" az elemeket:

$$341625 \to 143625 \to 123645$$

A '3' elemet a helyére cseréljük (nem kell csinálnunk semmit).

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg.''

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére'' az elemeket:

$$341625 \to 143625 \to 123\overset{\downarrow}{6}\overset{\downarrow}{4}5 \to 123465$$

A '4' elemet a helyére cseréljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg."

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére" az elemeket:

$$341625 \to 143625 \to 123645 \to 1234\overset{\downarrow}{6}\overset{\downarrow}{5} \to 123456$$

Az '5' elemet a helyére cseréljük.

Definíció. Egy $\pi \in S_n$ permutáció páros, ha az inverziószáma páros. π páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Példa. A 24135 permutáció (mint sorbaállítás) inverziószáma 3, tehát ez a permutáció páratlan.

Definíció. Egy permutációban (mint sorbaállításban) két elem megcserélését idegen szóval transzpozíciónak nevezzük.

Állítás. Tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációból transzpozíciók végrehajtásával megkapható az 123...n identikus permutáció.

„Könyvespolcunkon a többkötetes lexikon köteteit növekvő sorrendbe tudjuk rakni akkor is, ha egy lépésben mindig csak két kötetet cserélhetünk meg."

Biz. Balról jobbra haladva „cseréljük a helyére" az elemeket:

$$341625 \to 143625 \to 123645 \to 123465 \to 123456$$

Ezzel a '6' elem is helyére került, készen vagyunk. $\square$

Megjegyzés. Természetesen egy π permutációból többféleképpen is előállíthatjuk az identikus permutációt transzpozíciókkal:

$$34152 \xrightarrow{13} 14352 \xrightarrow{24} 12354 \xrightarrow{45} 12345$$

$$34152 \xrightarrow{34} 43152 \xrightarrow{13} 41352 \xrightarrow{14} 14352 \xrightarrow{25} 14325 \xrightarrow{24} 12345$$

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a nyilakra ráírtuk, hogy melyik két elemet cseréltük meg.

Megjegyzés. Természetesen egy π permutációból többféleképpen is előállíthatjuk az identikus permutációt transzpozíciókkal:

$$34152 \xrightarrow{13} 14352 \xrightarrow{24} 12354 \xrightarrow{45} 12345$$

$$34152 \xrightarrow{34} 43152 \xrightarrow{13} 41352 \xrightarrow{14} 14352 \xrightarrow{25} 14325 \xrightarrow{24} 12345$$

A szükséges lépések számának paritása azonban meghatározott:

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutáció páros, akkor az identikus permutációt csak páros sok transzpozíció végrehajtásával lehet előállítani π-ből. Ha pedig π páratlan, akkor csak páratlan sok transzpozíció végrehajtásával.

Megjegyzés. Természetesen egy π permutációból többféleképpen is előállíthatjuk az identikus permutációt transzpozíciókkal:

$$34152 \xrightarrow{13} 14352 \xrightarrow{24} 12354 \xrightarrow{45} 12345$$

$$34152 \xrightarrow{34} 43152 \xrightarrow{13} 41352 \xrightarrow{14} 14352 \xrightarrow{25} 14325 \xrightarrow{24} 12345$$

A szükséges lépések számának paritása azonban meghatározott:

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutáció páros, akkor az identikus permutációt csak páros sok transzpozíció végrehajtásával lehet előállítani π-ből. Ha pedig π páratlan, akkor csak páratlan sok transzpozíció végrehajtásával.

Ez nyilvánvalóan következik az alábbi lemmából (felhasználva, hogy az identikus permutáció inverziószáma 0, páros):

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

$$427318596 \to 423718596$$

Csak a két megcserélt elem egymáshoz viszonyított sorrendje (inverzióban állása / nem állása) változik meg, a többi elempáré nem, így az inverziószám ± 1-gyel változik.

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*

Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

$$4\,2\overbrace{7318}^{s}5\,96$$

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

427318596

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

472318596

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

4732185 96

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

$$473128596$$

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

473182596

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

$$473185296$$

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*

Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s + 1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

4731582 96

47315829 6

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

$$473518296$$

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

$$475318296$$

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere" egymás utáni elvégzésével:

457318296

Lemma. Ha egy permutáción végrehajtunk egy transzpozíciót, akkor az inverziószámának paritása megváltozik.

Bizonyítás. 1. *Ha két szomszédos elemet cserélünk meg*, akkor könnyen ellenőrizhetően megváltozik az inverziószám paritása.

2. *Ha két tetszőleges elemet cserélünk meg:*
Ha a megcserélendő elemek között s további elem áll, akkor ez a csere előállítható $2s+1$ „szomszédos elemcsere” egymás utáni elvégzésével:

$$457318296$$

Az 1. pont szerint mindegyik „szomszédos elemcsere” megváltoztatta az inverziószám paritását. Mivel $2s+1$ ilyen cserét hajtottunk végre, így $2s+1$-szer, azaz páratlan sokszor változott meg a paritás. Tehát összességében megváltozott az inverziószám paritása a kiinduló állapothoz képest. □

Emlékeztető:

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutáció páros, akkor az identikus permutációt csak páros sok transzpozíció végrehajtásával lehet előállítani π-ből. Ha pedig π páratlan, akkor csak páratlan sok transzpozíció végrehajtásával.

Ez a következőt jelenti:

Következmény. Egy $\pi \in S_n$ permutáció paritását a következőképpen is meghatározhatjuk: Transzpozíciókkal előállítjuk π-ből az identikus permutációt valahogy. Az előállításban szereplő transzpozíciók számának paritása lesz π paritása.

Példa. A $341265 \in S_6$ permutáció páros, mert előállítható belőle az identikus permutáció 4 (páros sok) transzpozícióval:

$$341625 \xrightarrow{13} 143625 \xrightarrow{24} 123645 \xrightarrow{46} 123465 \xrightarrow{56} 123456$$

Egy $\pi \rightsquigarrow \mathrm{id}$ transzpozíciókkal történő előállítás „visszafelé olvasva'' egy $\mathrm{id} \rightsquigarrow \pi$ transzpozíciókkal történő előállítás:

$$\pi = 341625 \xrightarrow{13} 143625 \xrightarrow{24} 123645 \xrightarrow{46} 123465 \xrightarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = 341625 \xleftarrow{13} 143625 \xleftarrow{24} 123645 \xleftarrow{46} 123465 \xleftarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

Egy $\pi \rightsquigarrow \mathrm{id}$ transzpozíciókkal történő előállítás „visszafelé olvasva” egy $\mathrm{id} \rightsquigarrow \pi$ transzpozíciókkal történő előállítás:

$$\pi = 341625 \xrightarrow{13} 143625 \xrightarrow{24} 123645 \xrightarrow{46} 123465 \xrightarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = 341625 \xleftarrow{13} 143625 \xleftarrow{24} 123645 \xleftarrow{46} 123465 \xleftarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}(56)(46)(24)(13) = (56)(46)(24)(13).$$

π transzpozíciókkal történő előállítása az identikus permutációból pedig nem más, mint π transzpozíciók szorzatára való bontása a diszkrét matematika kurzuson látott értelemben (π-re átrendezésként tekintve).

Egy $\pi \rightsquigarrow \mathrm{id}$ transzpozíciókkal történő előállítás „visszafelé olvasva" egy $\mathrm{id} \rightsquigarrow \pi$ transzpozíciókkal történő előállítás:

$$\pi = 341625 \xrightarrow{13} 143625 \xrightarrow{24} 123645 \xrightarrow{46} 123465 \xrightarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = 341625 \xleftarrow{13} 143625 \xleftarrow{24} 123645 \xleftarrow{46} 123465 \xleftarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{id}(56)(46)(24)(13) = (56)(46)(24)(13).$$

π transzpozíciókkal történő előállítása az identikus permutációból pedig nem más, mint π transzpozíciók szorzatára való bontása a diszkrét matematika kurzuson látott értelemben (π-re átrendezésként tekintve).

Ezek alapján eddigi észrevételeinket átfogalmazhatjuk a következőképpen:

$$\pi = 341625 \xrightarrow{13} 143625 \xrightarrow{24} 123645 \xrightarrow{46} 123465 \xrightarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = 341625 \xleftarrow{13} 143625 \xleftarrow{24} 123645 \xleftarrow{46} 123465 \xleftarrow{56} 123456 = \mathrm{id}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{id}(56)(46)(24)(13) = (56)(46)(24)(13).$$

Tétel'. Minden $\pi \in S_n$ permutáció előállítható az identikus permutációból transzpozíciók végrehajtásával. Ha π páros, akkor ez csak páros sok transzpozícióval lehetséges; ha π páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Tétel''. Minden $\pi \in S_n$ permutáció előáll transzpozíciók szorzataként. Ha π páros, akkor minden ilyen szorzatra bontás páros sok tényezőből áll; ha π páratlan, akkor páratlan sokból.

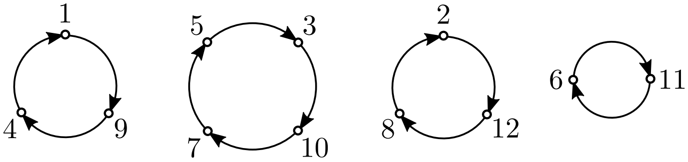
Következmény. Tehát π paritása egy tetszőleges transzpozíciók szorzatára való bontásból kiolvasható: ez a tényezők (transzpozíciók) számának paritása.

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n - k$ szám paritásával.

Tehát most átrendezésként tekintünk π-re.

Példa. Az ábrán látható permutáció páros, mert az alaphalmaz elemszáma $n = 12$, a ciklusok száma $k = 4$, és így $n - k = 8$ páros.



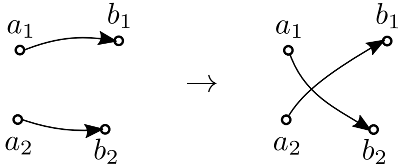
Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy π-ből megkapható az identikus permutáció $n-k$ transzpozícióval. Ez a korábbiak alapján bizonyítja az állítást.

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy π-ből megkapható az identikus permutáció $n-k$ transzpozícióval. Ez a korábbiak alapján bizonyítja az állítást.

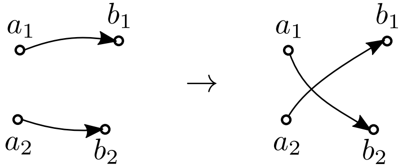
Az átrendezéses szemléletben egy transzpozíció két elem képének a felcserélését jelenti:



Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy π-ből megkapható az identikus permutáció $n-k$ transzpozícióval. Ez a korábbiak alapján bizonyítja az állítást.

Az átrendezéses szemléletben egy transzpozíció két elem képének a felcserélését jelenti:



Ilyen operációkkal szeretnénk megkapni π-ből az identikus permutációt (amelyben minden elem képe önmaga).

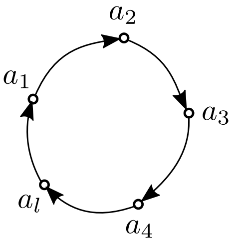
Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

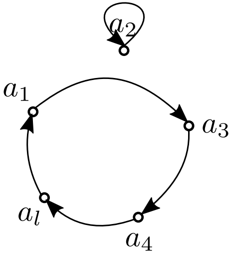
Egy l hosszú ciklust $l-1$ transzpozícióval „hurokélekre” tudunk bontani:



Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

Egy l hosszú ciklust $l-1$ transzpozícióval „hurokélekre" tudunk bontani:

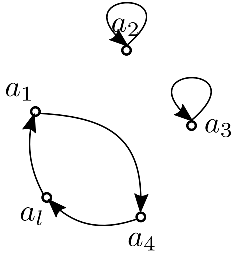


a_1 és a_2 képeit megcseréltük

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \dots, l_k$. Nyilván $l_1 + \dots + l_k = n$.

Egy l hosszú ciklust $l-1$ transzpozícióval „hurokélekre” tudunk bontani:

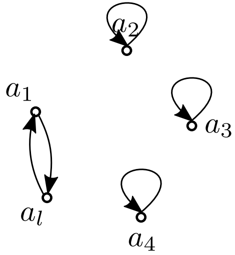


a_1 és a_3 képeit megcseréltük

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n - k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

Egy l hosszú ciklust $l - 1$ transzpozícióval „hurokélekre" tudunk bontani:

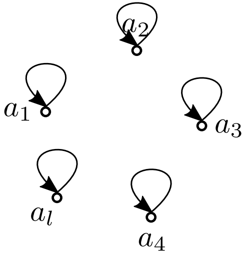


a_1 és a_4 képeit megcseréltük

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

Egy l hosszú ciklust $l-1$ transzpozícióval „hurokélekre" tudunk bontani:



a_1 és a_l képeit megcseréltük

Tétel. Ha a $\pi \in S_n$ permutációnak k darab ciklusa van, akkor π paritása megegyezik az $n-k$ szám paritásával.

Tegyük fel, hogy π ciklusainak hosszai rendre $l_1, \ldots, l_k$. Nyilván $l_1 + \cdots + l_k = n$.

Egy l hosszú ciklust $l-1$ transzpozícióval „hurokélekre" tudunk bontani. ($l = 1$ is OK.)

Ezt π minden ciklusára külön-külön végrehajtva, összesen

$$(l_1 - 1) + \cdots + (l_k - 1) = (l_1 + \cdots + l_k) - k = n - k$$

transzpozícióval megkapjuk π-ből az identikus permutációt. Ezt akartuk bizonyítani. $\square$

Összegzés. A $\pi \in S_n$ permutáció pontosan akkor páros, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike/mindegyike teljesül:

- π inverziószáma páros (mi így definiáltuk).
- π előáll páros sok transzpozíció szorzataként.
- π minden transzpozíciók szorzatára való bontása páros sok tényezőből áll (másszóval, π nem áll elő páratlan sok transzpozíció szorzataként).
- $n - k$ páros, ahol k a π ciklusainak számát jelöli (és n az alaphalmaz elemszámát).

Összegzés. A $\pi \in S_n$ permutáció pontosan akkor páratlan, ha az alábbi ekvivalens feltételek valamelyike/mindegyike teljesül:

- π inverziószáma páratlan (mi így definiáltuk).
- π előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként.
- π minden transzpozíciók szorzatára való bontása páratlan sok tényezőből áll (másszóval, π nem áll elő páros sok transzpozíció szorzataként).
- $n-k$ páratlan, ahol k a π ciklusainak számát jelöli (és n az alaphalmaz elemszámát).