Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok generátorfüggvénye

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Megjegyzés. A második egyenlőség az előadáson látott $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ lemmából, a harmadik egyenlőség pedig a formális hatványsorok műveleti tulajdonságaiből következik (lásd 3/(iii) a segédanyagban). Ezek után csak az első egyenlőséget kell bizonyítani.

Bizonyítás. Tekintsük az első egyenlőség után szereplő

$$F = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)\dots(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)$$

formális hatványsort (n tényezővel). Azt kell belátnunk, hogy F-ben x^k együtthatója $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Rögzítsünk egy k-t. A többtényezős szorzatról tanultak szerint x^k együtthatóját megkaphatjuk úgy, hogy az összes lehetséges módon kiválasztunk mindegyik zárójelből egy-egy tagot összeszorzásra, és az így kapott n-tényezős szorzatok közül összegyűjtjük (összeadjuk) azokat, amelyekben a tényezők összeszorzása után x kitevője k lesz, és ezek összegéből leolvassuk a keresett együtthatót.

Most mindegyik zárójel esetén az $\{x^0, x^1, x^2, x^3, \dots\}$ halmazból választunk monomot tényezőnek, így a szóba jöhető n-tényezős szorzatok pontosan az

$$x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n}$$

szorzatok, ahol az $m_1, m_2, \dots, m_n$ kitevők tetszőleges természetes számok lehetnek. Mivel $x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} = x^{m_1 + \dots + m_n}$, ezért pontosan azokat a szorzatokat kell összegyűjtenünk, amelyekre $m_1 + \dots + m_n = k$. Ezekből annyi van, ahányféleképp meg tudjuk választani az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ kitevősorozatot úgy, hogy $m_1 + \dots + m_n = k$ legyen. Ez a szám pedig épp az $[n]$ feletti k elemű multihalmazok száma (multiplicitásvektorokkal gondolkodva), vagyis $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Mivel mind az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ darab összegyűjtött szorzat x^k-ná szorzódik össze, ezért ezek összességében egy $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k$ taggal járulnak hozzá F-hez, amit bizonyítani kellett. $\square$

Tömör leírás. Az előző bizonyítást tömörebb formában megismételjük a formalizmus gyakorlása érdekében. Az $F_1 = F_2 = \dots = F_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (egymással megegyező) formális hatványsorokra alkalmazva a többtényezős szorzatról tanultakat (a „Formális hatványsorok műveleti tulajdonságai” segédanyag 2. állítását), a bizonyítandót kapjuk:

$$\begin{aligned}
[x^k](1 + x + x^2 + \dots)^n &= [x^k](F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n) = \\
&= \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = k \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} ([x^{m_1}]F_1)([x^{m_2}]F_2)\dots([x^{m_n}]F_n) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = k \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} 1 = \\
&= \left|\left\{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + \dots + m_n = k\right\}\right| = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right).
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségnél ismét a multiplicitásvektoraikkal reprezentálva számoltuk meg az $[n]$ feletti k elemű multihalmazokat. $\square$

Indukciós bizonyítás. (Vázlat.) n szerinti indukcióval is igazolható a tétel lényegi állítása, az első egyenlőség. Az indukciós lépésben az

$$\left(\left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n}{1}\!\right)x + \left(\!\binom{n}{2}\!\right)x^2 + \dots\right)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \left(\left(\!\binom{n+1}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n+1}{1}\!\right)x + \left(\!\binom{n+1}{2}\!\right)x^2 + \dots\right)$$

egyenlőséget kell igazolni. Ehhez az $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n}{1}\!\right) + \left(\!\binom{n}{2}\!\right) + \dots + \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n+1}{k}\!\right)$ azonosságot kell belátni, ami nem nehéz (osztályozzuk az $[n+1]$ feletti k elemű multihalmazokat az ‘$n+1$’ elem multiplicitása szerint). $\square$