Formális hatványsorok
(+ Newton-formula)

Kombinatorika

2., 3. és 6. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2020.

Definíció. Formális hatványsor alatt egy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás" írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Definíció. Formális hatványsor alatt egy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás" írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

A formális hatványsorokat nagybetűvel szokás jelölni.

Definíció. Formális hatványsor alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás" írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Megjegyzés. Formális hatványsor $\equiv$ „Végtelen polinom"

Definíció. Formális hatványsor alatt egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

alakú (végtelen sok tagból álló) formális kifejezést értünk, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ valós számok, x pedig egy szimbólum.

Megjegyzés. Használjuk a „szummás” írásmódot is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példa.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n,$$

azaz

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Jelölés. $\mathbb{R}[[x]]$: a formális hatványsorok halmaza

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

formális hatványsorban az x^n együtthatóján az a_n számot értjük. Ezt az együtthatót $[x^n]F$-fel jelöljük.

Példa. $F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$ esetén $[x^3]F = 7$.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsorban az x^n együtthatóján az a_n számot értjük. Ezt az együtthatót $[x^n]F$-fel jelöljük.

Példa. $F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$ esetén $[x^3]F = 7$.

Konvenció. Formális hatványsorok esetén is élünk a polinomoknál megszokott jelölésbeli konvenciókkal. Tehát például

$$2 + 1x + (-4)x^2 + 0x^3 + \sqrt{2}x^4 + \dots$$

helyett azt írjuk, hogy

$$2 + x - 4x^2 + \sqrt{2}x^4 + \dots$$

- $+(-a)x^n \rightsquigarrow -ax^n$
- a 0 együtthatójú tagokat nem írjuk ki
- stb.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad \longleftrightarrow \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \quad \longleftrightarrow \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \ldots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat generátorfüggvényének is nevezzük.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \quad \longleftrightarrow \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \ldots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat generátorfüggvényének is nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy természetesen két hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha megegyezik az együtthatósorozatuk.

Megjegyzés. A formális hatványsor valójában nem egyéb, mint egy végtelen sorozat szokatlan kódolása:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad \longleftrightarrow \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formális hatványsort az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat generátorfüggvényének is nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy természetesen két hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha megegyezik az együtthatósorozatuk.

$* * *$

Definíció. A polinom olyan formális hatványsor, amelyben csak véges sok nemnulla együttható van (tehát a 0 együtthatójú tagok elhagyása után csak véges sok tagból áll).

Példa. $2 - 3x + 5x^2 - x^3$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok összegén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

formális hatványsort értjük. Jelölése: $A + B$.

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok összegén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

formális hatványsort értjük. Jelölése: $A + B$.

Példa. Legyen A a 2-hatványok generátorfüggvénye, B pedig a prímszámok generátorfüggvénye, tehát

$$A = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots$$

$$B = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 13x^5 + \dots$$

Ekkor

$$A + B = 3 + 5x + 9x^2 + 15x^3 + 27x^4 + 45x^5 + \dots$$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok szorzatán azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\
c_4 &= a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok szorzatán azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

Példa. Legyenek A és B az előző példabeli formális htvsorok:

$$A = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots$$
$$B = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 13x^5 + \dots$$

Ekkor

$$A \cdot B = (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots)(2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots)$$
$$= 2 + 7x + 19x^2 + 45x^3 + \dots$$

mert $1 \cdot 2 = 2, \quad 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7, \quad 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 19,$
$1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 45.$

Definíció. Az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ formális hatványsorok szorzatán azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ formális hatványsort értjük, amelyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A szorzat jelölése: $A \cdot B$.

A definícióban szereplő összeget így is írhatjuk:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

Szorzás szemléletesen. A szorzás úgy van definiálva, hogy a szorzat a következő eljárással is megkapható: „Minden tagot minden taggal összeszorzunk, majd az így kapott szorzatok összegét vesszük, és ebben az azonos kitevőjű tagokat összevonjuk.”

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
\cdot & b_0 & + & b_1x & + & b_2x^2 & + & b_3x^3 & + & b_4x^4 & + & \cdots & = B \\
\hline
a_0 & a_0b_0 & & a_0b_1x & & a_0b_2x^2 & & a_0b_3x^3 & & a_0b_4x^4 & & \cdots & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
a_1x & a_1b_0x & & a_1b_1x^2 & & a_1b_2x^3 & & a_1b_3x^4 & & \cdots & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
a_2x^2 & a_2b_0x^2 & & a_2b_1x^3 & & a_2b_2x^4 & & \cdots & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
a_3x^3 & a_3b_0x^3 & & a_3b_1x^4 & & \cdots & & \ddots & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
a_4x^4 & a_4b_0x^4 & & \cdots & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{c}{\|} & & & & & & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{c}{A} & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$\overset{\Sigma}{\rightsquigarrow} AB$$

Valóban.

$$a_0b_0 \qquad (a_0b_1 + a_1b_0)x \qquad (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \qquad (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 \qquad (a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0)x^4 \qquad \cdots$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
\cdot & b_0 + & b_1x + & b_2x^2 + & b_3x^3 + & b_4x^4 + & \cdots \quad = B \\
\hline
a_0 & a_0b_0 & a_0b_1x & a_0b_2x^2 & a_0b_3x^3 & a_0b_4x^4 & \cdots \\
+ & & & & & & \\
a_1x & a_1b_0x & a_1b_1x^2 & a_1b_2x^3 & a_1b_3x^4 & \cdots & \\
+ & & & & & & \\
a_2x^2 & a_2b_0x^2 & a_2b_1x^3 & a_2b_2x^4 & \cdots & & \\
+ & & & & & & \\
a_3x^3 & a_3b_0x^3 & a_3b_1x^4 & \cdots & \ddots & & \\
+ & & & & & & \\
a_4x^4 & a_4b_0x^4 & \cdots & & & & \\
+ & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
\parallel & & & & & & \\
A & & & & & &
\end{array}$$

$$\overset{\Sigma}{\rightsquigarrow} AB$$

Szorzás szemléletesen. A szorzás úgy van definiálva, hogy a szorzat a következő eljárással is megkapható: „Minden tagot minden taggal összeszorzunk, majd az így kapott szorzatok összegét vesszük, és ebben az azonos kitevőjű tagokat összevonjuk."

Állítás. A szorzás fontos tulajdonsága (vö. Formális hatványsorok műveleti tulajdonságai segédanyag 2. pontja), hogy a többtényezős szorzat is így számolható ki. Ez a tényezők száma szerinti indukcióval bizonyítható (de a bizonyítás nem vizsgaanyag).

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$-fel jelölt) fokszáma az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.

(Az „azonosan 0" formális hatványsor fokszámát ∞-nek definiáljuk.)

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$-fel jelölt) fokszáma az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.

(Az „azonosan 0" formális hatványsor fokszámát ∞-nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$-fel jelölt) fokszáma az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.

(Az „azonosan 0'' formális hatványsor fokszámát ∞-nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Megjegyzés. Ahogy az utolsó példa is illusztrálja, polinomok esetén a fenti fokszámdefiníció NEM a hagyományos értelemben vett polinomfokszámot adja (ami a példában 2 lenne).

Definíció. Az $F \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsor ($\deg F$-fel jelölt) fokszáma az a LEGKISEBB $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $[x^k]F \neq 0$.

(Az „azonosan 0" formális hatványsor fokszámát ∞-nek definiáljuk.)

Példák.

$$\deg(5x^3 + 8x^7 + 13x^{11} + 21x^{15} + \dots) = 3$$

$$\deg(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots) = 1$$

$$\deg(9 - 6x + x^2) = 0.$$

Megjegyzés. Ahogy az utolsó példa is illusztrálja, polinomok esetén a fenti fokszámdefiníció NEM a hagyományos értelemben vett polinomfokszámot adja (ami a példában 2 lenne).

Észrevétel. Tetszőleges $F, G \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén

$$\deg(F \cdot G) = \deg F + \deg G.$$

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \qquad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok hányadosának nevezzük, és $\frac{B}{A}$-val jelöljük.

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \qquad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok hányadosának nevezzük, és $\frac{B}{A}$-val jelöljük.

Megjegyzés. Csak az állításban szereplő feltételek teljesülése esetén definiáljuk a hányadost, tehát például $\frac{1}{x}$ nem értelmezett. (Ezzel szemben például $\frac{1}{1+x}$ értelmezett.)

Amennyiben $\deg A > \deg B$, úgy a $(*)$ egyenletnek nincs is megoldása, hiszen a bal oldal fokszáma minden $X \in \mathbb{R}[[x]]$ hatványsorra nagyobb, mint a jobb oldalé:

$$\deg(A \cdot X) = \deg A + \deg X \geq \deg A > \deg B.$$

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \qquad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok hányadosának nevezzük, és $\frac{B}{A}$-val jelöljük.

Hasznos észrevétel. Amennyiben a nevezőben a konstans tag nemnulla (azaz ha $\deg A = 0$), akkor a $\frac{B}{A}$ hányados mindig értelmezett:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{6-7x+x^2}{3+2x}, \quad \frac{x^3}{4+x^2}, \quad \ldots$$

Mivel a későbbiekben csak ilyen hányadosokkal fogunk dolgozni, a fenti állítás bizonyítását is csak erre az esetre részletezzük.

Állítás + Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$. Ha $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$, akkor a

$$A \cdot X = B \qquad (*)$$

egyenletnek (ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ ismeretlen formális hatványsor) egyetlenegy megoldása van. Ezt a megoldást a B és A formális hatványsorok hányadosának nevezzük, és $\frac{B}{A}$-val jelöljük.

Biz. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Keressük az $X = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x^n$ formális hatványsort úgy, hogy $(*)$, vagyis az

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

egyenlőség teljesüljön. Tehát a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ ismeretlen együtthatókat kell meghatározni úgy, hogy a bal oldalon a szorzás elvégzése után a szorzat együtthatói $b_0, b_1, b_2, \dots$ legyenek. Látni fogjuk, hogy ebből a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ együtthatókat balról jobbra haladva sorban kitalálhatjuk (egyértelmű módon).

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$$\Updownarrow \text{ (szorzat definíciója)}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_0\xi_0 &= b_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 &= b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 &= b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 &= b_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

Ez egy végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszer, amelyben $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ az ismeretlenek (ez végtelen sok ismeretlen), az a_i és b_j számokat pedig ismerjük.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$$\Updownarrow \text{ (szorzat definíciója)}$$

$$\begin{cases} a_0\xi_0 = b_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$\Updownarrow$ (szorzat definíciója)

$$\begin{cases} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark \quad \rightarrow \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.
Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0-t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$$\Updownarrow \text{ (szorzat definíciója)}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_0\xi_0 &= b_0 \checkmark & \to \quad & \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 &= b_1 \checkmark & \to \quad & \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 &= b_2 \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 &= b_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.
Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0-t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.
A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1-et (most már ismerjük ξ_0-t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$\Updownarrow$ (szorzat definíciója)

$$\begin{cases} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow \quad \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow \quad \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 & \\ \vdots & \end{cases}$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0-t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1-et (most már ismerjük ξ_0-t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

A 3. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_2-t (most már ismerjük ξ_0-t és ξ_1-et): $\xi_2 = (b_2 - a_1\xi_1 - a_2\xi_0)/a_0 = \dots$

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$\Updownarrow$ (szorzat definíciója)

$$\begin{cases} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \to \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \to \quad \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \to \quad \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \to \quad \xi_3 = \dots \\ \vdots & \end{cases}$$

Először feltesszük, hogy $a_0 \neq 0$.

Ilyenkor az 1. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_0-t: $\xi_0 = \frac{b_0}{a_0}$.

A 2. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_1-et (most már ismerjük ξ_0-t): $\xi_1 = (b_1 - a_1\xi_0)/a_0 = (b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0})/a_0$.

A 3. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_2-t (most már ismerjük ξ_0-t és ξ_1-et): $\xi_2 = (b_2 - a_1\xi_1 - a_2\xi_0)/a_0 = \dots$

A 4. egyenlet egyértelműen meghatározza ξ_3-at: $\xi_3 = \dots$

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$\Updownarrow$ (szorzat definíciója)

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \rightarrow & \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \rightarrow & \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \rightarrow & \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \rightarrow & \xi_3 = \dots \\ \vdots & & \end{array}\right.$$

És így tovább, az egyenleteken sorban végigmenve megkapjuk azt az egyértelmű $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ számsorozatot, amelyre teljesül az összes egyenlőség (ξ_n értékét az $(n+1)$-edik lépésben kapjuk meg). Fontos megjegyezni, hogy az aktuális ξ_n kifejezésénél mindig az $a_0 \neq 0$ számmal kell osztani, ami megtehető.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3+\dots)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

$$\Updownarrow \text{ (szorzat definíciója)}$$

$$\begin{cases} a_0\xi_0 = b_0 \checkmark & \to \quad \xi_0 = b_0/a_0 \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_1 \checkmark & \to \quad \xi_1 = \dots \\ a_0\xi_2 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 = b_2 \checkmark & \to \quad \xi_2 = \dots \\ a_0\xi_3 + a_1\xi_2 + a_2\xi_1 + a_3\xi_0 = b_3 \checkmark & \to \quad \xi_3 = \dots \\ \vdots & \end{cases}$$

Ez az eljárás akkor is működik, ha $a_0 = 0$. Az állításban szereplő $\deg A \leq \deg B$ és $A \neq 0$ feltételek garantálják, hogy az egyenletek előbb látott „felgöngyölítése'' ilyenkor is pontosan egy $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ együtthatósorozathoz vezessen (ahol osztunk, ott nemnulla számmal tesszük, stb.). A részleteket mellőzzük. $\square$

Állítás.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Állítás.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Bizonyítás.
$$\begin{aligned}(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = \\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ - x - x^2 - x^3 - x^4 - \dots = 1.\end{aligned}$$

$\square$

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, és $n \in \mathbb{Z}^+$. Ekkor

$$F^n := \overbrace{F \cdot F \cdot \ldots \cdot F}^{n\text{-szer}}$$

$$F^0 := 1$$

$$F^{-n} := \frac{1}{F^n}.$$

Az utolsó művelet csak akkor van definiálva, ha az $\frac{1}{F^n}$ tört értelmezve van, tehát ha $\deg F = 0$, azaz $[x^0]F \neq 0$.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) deriváltján az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F'-vel jelölünk.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) deriváltján az

$$F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F'-vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

Ha $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor $F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$.

Definíció. Az

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

formális hatványsor (formális) deriváltján az

$$F' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

formális hatványsort értjük, amelyet F'-vel jelölünk.

Szumma-jelekkel:

Ha $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor $F' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Állítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy az imént definiált műveletre is teljesülnek a hagyományos deriviálásnál megszokott azonosságok, például $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

A „deriválási szabályok” megtalálhatók a formális hatványsoros segédanyagban.

Az „összetett fgv. képzés" megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G kompozíciója az

$$F \circ G := a_0 + a_1 G + a_2 G^2 + a_3 G^3 + a_4 G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n] a_k G^k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Emlékeztető: $G^k = \overbrace{G \cdot G \cdot \ldots \cdot G}^{k\text{-szor}}$

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G kompozíciója az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty/n} [x^n]a_kG^k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg tekinthető végesnek, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_kG^k = 0$.

Az „összetett fgv. képzés” megfelelője formális hatványsorokra:

Definíció. Legyen

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Ha G egy olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$ (vagyis a konstans tagja 0), akkor F és G kompozíciója az

$$F \circ G := a_0 + a_1G + a_2G^2 + a_3G^3 + a_4G^4 + \dots$$

formális hatványsor. Ez úgy értendő, hogy

$$[x^n](F \circ G) := \sum_{k=0}^{\infty} [x^n]a_kG^k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiegészítés. A definíció értelmezéséhez fontos tisztázni, hogy az x^n együtthatóját definiáló összeg tekinthető végesnek, ugyanis $[x^0]G = 0$ miatt $k > n$ esetén $[x^n]a_kG^k = 0$.

Megjegyzés. $[x^0]G \neq 0$ esetén nem definiáljuk $F \circ G$-t.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk" egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére" lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk" egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére" lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow \; x \leftarrow 5x$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

A formális hatványsoros segédanyagban szereplő műveleti tulajdonságokat úgy lehet összefoglalni, hogy ha egy hatványsorokra vonatkozó egyenlőségben x helyére „beírunk” egy G hatványsort (0 konstans taggal), akkor ismét egyenlőséget kapunk.

A későbbiekben csak egytagú hatványsorok „behelyettesítésére” lesz szükségünk (pl. $G = 5x$ stb.), így ilyen példákat mutatunk:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow \; x \leftarrow 5x$$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

Ebben a prezentációban eddig tartott a kötelező anyag.
Az utolsó két dia kiegészítés.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Emlékeztető: $X^n = \overbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}^{n\text{-szer}}$

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$-fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1)-szeresei. $\sqrt[n]{F}$-fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.

Állítás + Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$ olyan formális hatványsor, amelyre $[x^0]F > 0$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Tekintsük az

$$X^n = F$$

egyenletet, ahol $X \in \mathbb{R}[[x]]$ az ismeretlen formális hatványsor.

Ha n páratlan, akkor az $X^n = F$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet $\sqrt[n]{F}$-fel jelölünk.

Ha n páros, akkor az $X^n = F$ egyenletnek két megoldása van, és ezek egymás (-1)-szeresei. $\sqrt[n]{F}$-fel jelöljük azt a megoldást, amelyikben a konstans tag pozitív (tehát $[x^0]X > 0$). A másik, negatív konstans tagú megoldás a $-\sqrt[n]{F}$ hatványsor.

Megjegyzés. Az állítást nem bizonyítjuk. Az osztásnál látottakhoz hasonlóan a keresett $X = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x^k$ hatványsor együtthatói $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sorrendben haladva meghatározhatók (páros n esetén két megoldás lesz, amelyek egymás ellentettjei).

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$

$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m .$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$
$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m .$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Ez most csak egy jelölés, amely egy aritmetikai műveletekkel definiált valós számot takar. (Természetesen $\alpha \in \mathbb{N}$ esetén megkapjuk a hagyományos binomiális együttható értékét, de egyéb esetekben nincs közvetlen kombinatorikus jelentése.)

Végül megjegyezzük, hogy $\binom{\alpha}{0} = 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definíció. Legyen $F \in \mathbb{R}[[x]]$, amelyre $[x^0]F > 0$. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ számokra

$$F^{1/n} := \sqrt[n]{F}$$
$$F^{m/n} := \left(\sqrt[n]{F}\right)^m .$$

Definíció. Tetszőleges $q > 0$ racionális számra

$$F^{-q} := \frac{1}{F^q}.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk a binomiális tételt).

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

1. A Newton-formula a binomiális tétel általánosítása (ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk a binomiális tételt).

2. A Newton-formulában x helyére beírható olyan G hatványsor, amelyre $[x^0]G = 0$:

$$(1+G)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} G^k.$$

(A jobb oldalt a kompozíciónál látott módon értelmezzük.)

Jelölés. $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Tétel (Newton-formula). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Megjegyzések.

3. Az előzőekből levezethető az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok generátorfüggvénye:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k.$$