Kombinatorikai alapelvek

Kombinatorika

1. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2021.

Honlapom: http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/

Itt megtalálhatók az elérhetőségeim, fogadóórám, illetve az előadás és a gyakorlat honlapja stb. A kurzushonlapokról minden kivetített vagy kiosztott segédanyag letölthető, illetve elérhető a pontos tételsor is (ld. TEMATIKA).

KÖVETELMÉNYEK. A kurzuson maximum 100 pontot lehet szerezni:

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- Két zárthelyi dolgozat lesz a gyakorlaton [max. 20 + 20 pont]: március 23. és május 18.
- Házi feladatok lesznek feladva, összesen 12 órán, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszámot veszem figyelembe [max. 20 pont]. A megoldásokat online oktatás esetén az erre létrehozott CooSpace feladathoz kell feltölteni, egyébként személyesen benyújtani.
- Pluszpontok kaphatók [max. 10 pont] órai munkáért, szorgalmi feladatok megoldásáért.
- A gyakorlaton az elérhető 60 pontból legalább 25 pontot kell szerezni az aláíráshoz és az előadásvizsgára bocsáthatósághoz.

Előadás [max. 40 pont]:

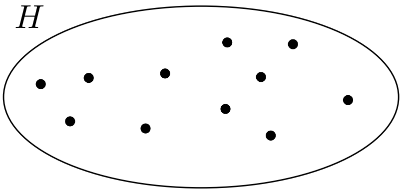
- Előadásvizsga [max. 40 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli(?) vizsga (1 kombinatorika és 1 gráfelmélet tételből). További részletek a honlapon.
- Pluszpontok az előadáson is szerezhetők, érdemi hozzászólással / hibajelzéssel.
- A 40 pontból legalább 15 pontot el kell érni a kurzus teljesítéséhez.

Ponthatárok:

0 – 50: **(1)** 51 – 62: **(2)** 63 – 75: **(3)** 76 – 87: **(4)** 88 – 100: **(5)**

A kombinatorika alapproblémája.

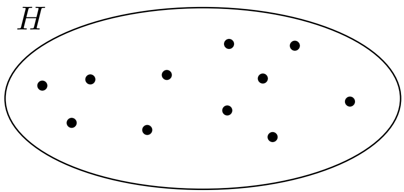
Egy összeszámlálási feladat egy adott H halmaz elemszámának meghatározását kéri.



$$|H| = ?$$

A kombinatorika alapproblémája.

Egy összeszámlálási feladat egy adott H halmaz elemszámának meghatározását kéri.



$$|H| = ?$$

Magyarázat. A megszámolandó objektumokat belerakhatjuk egy halmazba:

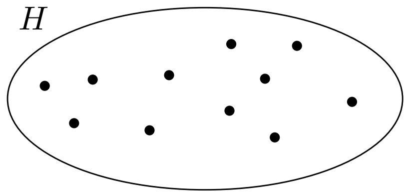
„Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?"

$$|||$$

„Legyen H az 5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmaza. Határozzuk meg H elemszámát."

A kombinatorika alapproblémája.

Egy összeszámlálási feladat egy adott H halmaz elemszámának meghatározását kéri.



$$|H| = ?$$

Magyarázat. A megszámolandó objektumokat belerakhatjuk egy halmazba:

„Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?"

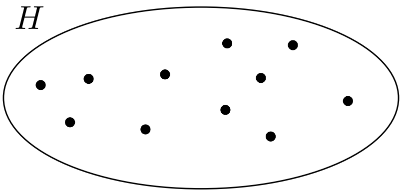
$$|||$$

„Legyen H az 5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmaza. Határozzuk meg H elemszámát."

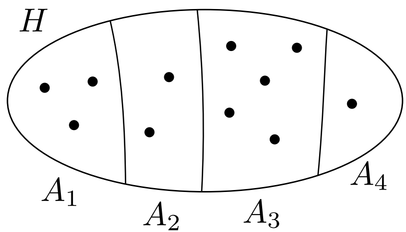
Megállapodás. Ezen a kurzuson csak véges H halmazok elemszámaival foglalkozunk. (Végtelen halmazok elemszámát a halmazelmélet vizsgálja.)

(Majd később megmondjuk pontosan, hogy mit is értünk véges halmazon.)

Mikor adunk össze?

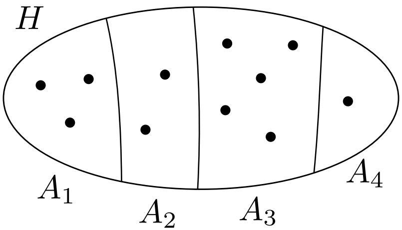


Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).

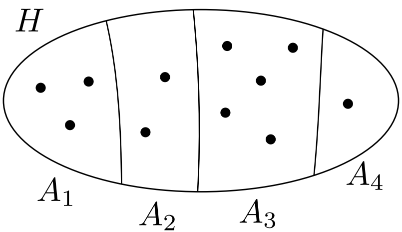


$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq H$ halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq H$ halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Összeadási alapelv (tömör verzió). Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|,$$

ahol $\dot\cup$ a diszjunkt uniót jelöli. (A „diszjunkt unió” a szokásos halmazelméleti unió művelet, azzal a többletinformációval, hogy az összeuniózott halmazok páronként diszjunktak.)

Mikor szorzunk?

Mikor szorzunk? Ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk:
„ . . . Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.” Majd ebből arra a következtetésre jutunk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Mikor szorzunk? Ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „ . . . Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.” Majd ebből arra a következtetésre jutunk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ azon k-asok ($\approx k$ hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1-ből, második eleme A_2-ből, . . . , k-adik eleme A_k-ból kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_k \in A_k\}.$$

Mikor szorzunk? Ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „ … Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.” Majd ebből arra a következtetésre jutunk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ azon k-asok ($\approx$ k hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1-ből, második eleme A_2-ből, … , k-adik eleme A_k-ból kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \dots,\ a_k \in A_k\}.$$

Vizuálisan ($k = 2$).

A_1 \ A_2	1	2	3	4
x	$(x,1)$	$(x,2)$	$(x,3)$	$(x,4)$
y	$(y,1)$	$(y,2)$	$(y,3)$	$(y,4)$
z	$(z,1)$	$(z,2)$	$(z,3)$	$(z,4)$

$A_1 \times A_2$

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Bizonyítás. $\boldsymbol{k = 2}$ **eset:** $\quad |A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|.$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & & A_2 & \\
A_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
x & (x,1) & (x,2) & (x,3) & (x,4) \\
y & (y,1) & (y,2) & (y,3) & (y,4) \\
z & (z,1) & (z,2) & (z,3) & (z,4) \\
 & & & & A_1 \times A_2
\end{array}$$

$A_1 \times A_2$ elemeit (a rendezett párokat) osztályozzuk a pár első eleme szerint. A pár első eleme $|A_1|$-féle lehet (ennyi osztály lesz); és tetszőleges rögzített $a \in A_1$ elemre az (a, y) alakú párok száma $|A_2|$, hiszen y-t ennyiféleképpen választhatjuk meg A_2-ből. (Vagyis minden osztályban $|A_2|$ darab rendezett pár van.) Ezért $A_1 \times A_2$ elemszáma

$$\overbrace{|A_2| + |A_2| + \cdots + |A_2|}^{|A_1|\text{-szor}} = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

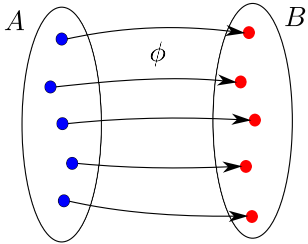
Bizonyítás. $\boldsymbol{k \geq 3}$ **eset:**

Több tényező esetén a gondolatmenet „folytatható”: Például $A_1 \times A_2 \times A_3$ hármasainak összeszámlálásakor a $k = 2$ esetből tudjuk, hogy a hármas első két elemét $|A_1| \cdot |A_2|$-féleképpen lehet megválasztani, majd az első két elem lerögzítése után (bárhogy is rögzítettük le az első két elemet) $|A_3|$-féleképpen választhatjuk meg a harmadik elemet.

És így tovább (k szerinti indukció) ... $\square$

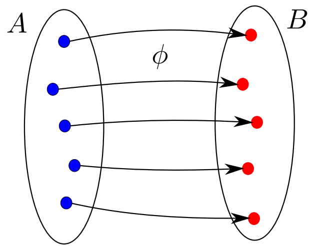
Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

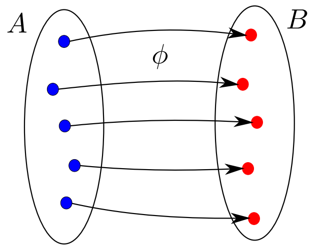
- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Ekvivalens definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció, ha minden B-beli elemnek pontosan egy őse van A-ban.

Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).

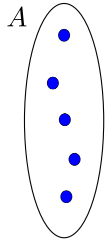


Ekvivalens definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció, ha minden B-beli elemnek pontosan egy őse van A-ban.

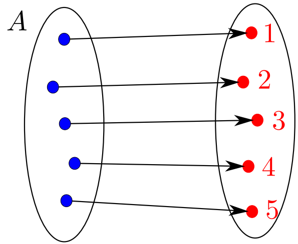
Bijekciós alapelv. Tetszőleges A, B véges halmazokra:

$$|A| = |B| \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Létezik } A \to B \text{ bijekció.}$$

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan *definiáljuk* ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan *definiáljuk* ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)

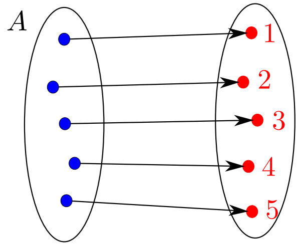


$$\Longrightarrow \; |A| = 5.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz elemszáma n, ha létezik $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő" megszámolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n-re.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan *definiáljuk* ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



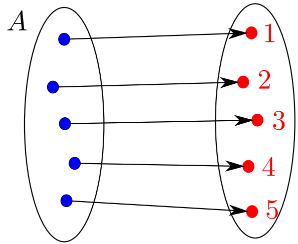
$\Longrightarrow\ |A| = 5.$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz elemszáma n, ha létezik $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő" megszámolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n-re.

Definíció. Egy A halmaz véges, ha $|A| = n$ valamely n természetes* számra.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan *definiáljuk* ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



$\Longrightarrow \ |A| = 5.$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz elemszáma n, ha létezik $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő'' megszámolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n-re.

Definíció. Egy A halmaz véges, ha $|A| = n$ valamely n természetes* számra.

Jelölések / konvenciók.

- Ezen a kurzuson a 0 is természetes szám: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Standard n elemű halmaz: $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, $[0] := \emptyset$

Kettős leszámlálás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Kettős leszámlálás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez teljesen nyilvánvaló. Mégis, néha két mennyiség egyenlőségét a legegyszerűbb úgy bizonyítani, hogy találunk egy olyan összeszámlálási problémát, amelyről be tudjuk látni, hogy mindkét mennyiség az erre adott válasz.

Kettős leszámlálás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez teljesen nyilvánvaló. Mégis, néha két mennyiség egyenlőségét a legegyszerűbb úgy bizonyítani, hogy találunk egy olyan összeszámlálási problémát, amelyről be tudjuk látni, hogy mindkét mennyiség az erre adott válasz.

Példa. Erre sok példát fogunk látni a kurzus során. Az egyik első példánk ez lesz:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n.$$

Látjuk majd, hogy mindkét oldal $\{1, 2 \ldots, n\}$ részhalmazait számolja meg. Pusztán algebrai eszközökkel még az sem világos első látásra, hogy a bal oldal egész szám.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}}=m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Csak arról van szó, hogy ha s_i-vel jelöljük az i-edik skatulyában lévő tárgyak számát, akkor

$$s_1 \le 1,\ s_2 \le 1,\ \ldots,\ s_m \le 1 \qquad \text{esetén} \qquad s_1+s_2+\cdots+s_m \le \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m.$$

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. □

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. **a)** Ha minden skatulyába n/m-nél (szigorúan) kevesebb tárgy kerülne, akkor összesen kevesebb, mint

$$\overbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}^{m\text{-szer}} = n$$

tárgyunk lenne. □

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. b) Ha minden skatulyába n/m-nél (szigorúan) több tárgy kerülne, akkor összesen több, mint

$$\overbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}^{m\text{-szer}} = n$$

tárgyunk lenne. $\square$

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}}=m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. b) Ha minden skatulyába n/m-nél (szigorúan) több tárgy kerülne, akkor összesen több, mint

$$\overbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}^{m\text{-szer}}=n$$

tárgyunk lenne. $\square$

Megjegyzés. Az általánosított skatulyaelv csak annak a ténynek a bonyolultabb megfogalmazása, hogy ha vesszük néhány szám átlagát, akkor az átlag a legnagyobb és a legkisebb szám között van. (n/m = átlagos skatulyatartalom.)

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség.
(„Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.")

Definíció. Egy H halmaz hatványhalmazán a H összes részhalmazainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$-val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$\mathcal{P}(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.")

Definíció. Egy H halmaz hatványhalmazán a H összes részhalmazainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$-val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$\mathcal{P}(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Hány részhalmaza van egy halmaznak? Például a $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazai:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \underline{a\ b\ c} & & \underline{a\ b\ c} \\
\emptyset & & \color{gray}{a\ b\ c} & & \color{gray}{\bullet\ \bullet\ \bullet} & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & \color{red}{a}\ \color{gray}{b\ c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet\ \bullet} & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & \color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c} & & \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & \color{gray}{a\ b}\ \color{red}{c} & \equiv & \color{gray}{\bullet\ \bullet}\ \color{red}{\bullet} & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a, b\} & & \color{red}{a\ b}\ \color{gray}{c} & & \color{red}{\bullet\ \bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 1\ 1\ 0 \\
\{a, c\} & & \color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet} & & 1\ 0\ 1 \\
\{b, c\} & & \color{gray}{a}\ \color{red}{b\ c} & & \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet\ \bullet} & & 0\ 1\ 1 \\
\{a, b, c\} & & \color{red}{a\ b\ c} & & \color{red}{\bullet\ \bullet\ \bullet} & & 1\ 1\ 1
\end{array}$$

Hány részhalmaza van egy halmaznak? Például a $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazai:

				$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$\color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$\color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$	$\equiv$	$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$\color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 1\ 1$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van. Másszóval, $|\mathcal{P}(H)| = 2^{|H|}$.

Hány részhalmaza van egy halmaznak? Például a $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazai:

						$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$\color{gray}{a\ b\ c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b\ c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$\color{gray}{a\ b}\ \color{red}{c}$	$\equiv$	$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$\color{red}{a\ b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b\ c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$\color{red}{a\ b\ c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 1\ 1$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van. Másszóval, $|\mathcal{P}(H)| = 2^{|H|}$.

Bizonyítás. Legyen H egy n elemű halmaz. H egy részhalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy a H halmaz minden elemére eldöntjük, hogy belevesszük-e a részhalmazba vagy nem („piros vagy szürke lesz''). Ez n független döntés, mindegyik elemnél kétféle lehetőséggel, ami a szorzási alapelv szerint összesen valóban $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$ lehetőség. $\square$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához . . .

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \color{blue}{a\ b\ c} & & \color{blue}{a\ b\ c} \\
\hline
\emptyset & & \color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c} & & \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & \color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & \color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c} & & \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & \color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c} & \equiv & \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet} & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a, b\} & & \color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet} & & 1\ 1\ 0 \\
\{a, c\} & & \color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet} & & 1\ 0\ 1 \\
\{b, c\} & & \color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c} & & \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet} & & 0\ 1\ 1 \\
\{a, b, c\} & & \color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c} & & \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet} & & 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához . . .

				$\color{blue}{a\ b\ c}$		$\color{blue}{a\ b\ c}$
$\emptyset$		$\color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$\color{gray}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$	$\equiv$	$\color{gray}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$\color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 1\ 1$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline \end{array} \\
\emptyset & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & a\ b\ c & \equiv & \bullet\ \bullet\ \bullet & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a, b\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 1\ 0 \\
\{a, c\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 0\ 1 \\
\{b, c\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 0\ 1\ 1 \\
\{a, b, c\} & & a\ b\ c & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

				$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$a\ b\ c$		● ● ●		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$a\ b\ c$	$\equiv$	● ● ●	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$a\ b\ c$		● ● ●		$1\ 1\ 1$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Megjegyzés. A karakterisztikus vektor definiálásához (és értelmezéséhez) le kell rögzíteni az alaphalmaz elemeinek egy sorrendjét!

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához …

						$\color{blue}{a\ b\ c}$		$\color{blue}{a\ b\ c}$
$\emptyset$		$\color{gray}{a\ b\ c}$		$\color{gray}{\bullet\ \bullet\ \bullet}$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b\ c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet\ \bullet}$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b}\ \color{gray}{c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$\color{gray}{a\ b}\ \color{red}{c}$	$\equiv$	$\color{gray}{\bullet\ \bullet}\ \color{red}{\bullet}$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$\color{red}{a\ b}\ \color{gray}{c}$		$\color{red}{\bullet\ \bullet}\ \color{gray}{\bullet}$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$\color{red}{a}\ \color{gray}{b}\ \color{red}{c}$		$\color{red}{\bullet}\ \color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet}$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$\color{gray}{a}\ \color{red}{b\ c}$		$\color{gray}{\bullet}\ \color{red}{\bullet\ \bullet}$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$\color{red}{a\ b\ c}$		$\color{red}{\bullet\ \bullet\ \bullet}$		$1\ 1\ 1$

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. $\square$

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n-elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Következmény. Az „egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van" állítás bizonyításának (szőrszálhasogatóan) precíz leírása:

Legyen H egy n elemű halmaz. Az előző állítás szerint létezik bijekció $\mathcal{P}(H)$ és a $\{0,1\}^n$ halmaz között. Így a bijekciós alapelv szerint

$$|\mathcal{P}(H)| = |\{0,1\}^n| = \left|\overbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}^{n\text{-szer}}\right| = \overbrace{|\{0,1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0,1\}|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n\text{-szer}} = 2^n,$$

ahol a 3. egyenlőségnél a szorzási alapelvet használtuk. $\square$