# FORMÁLIS HATVÁNYSOROK MŰVELETI TULAJDONSÁGAI

**Emlékeztető.** A valós polinomok $\mathbb{R}[x]$ halmaza a szokásos polinomösszeadás és -szorzás műveletekkel kommutatív egységelemes gyűrűt alkot.

**1. Formális hatványsorok gyűrűje.** A (valós) formális hatványsorok $\mathbb{R}[[x]]$ halmaza az előadáson definiált összeadás és szorzás műveletekkel *kommutatív egységelemes gyűrűt* alkot. Vagyis tetszőleges $F, G, H \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén teljesülnek a következők:

(i) $$(F+G)+H = F+(G+H),$$
(ii) $$F+G = G+F,$$
(iii) $$F+0 = F,$$
(iv) $$F+(-F) = 0, \quad \text{ahol } -F := (-1)F,$$
(v) $$(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H),$$
(vi) $$F \cdot G = G \cdot F,$$
(vii) $$1 \cdot F = F,$$
(viii) $$(F+G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H.$$

**2. Többtényezős szorzat.** Több formális hatványsort a polinomoknál megismert módon is összeszorozhatunk (ez a tényezők száma szerinti indukcióval egyszerűen belátható): Tetszőleges $F_1, \ldots, F_d \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén

$$[x^n](F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_d) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n \\ k_1,\ldots,k_d \in \mathbb{N}}} ([x^{k_1}]F_1)([x^{k_2}]F_2)\ldots([x^{k_d}]F_d).$$

**3. Az osztás tulajdonságai.** A következő azonosságokat úgy kell érteni, hogy „ha a bal oldal értelmezve van, akkor a jobb oldal is, és a két oldal egyenlő” ($A, B, C, D \in \mathbb{R}[[x]]$):

(i) $$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC},$$
(ii) $$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C},$$
(iii) $$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

**4. A kompozíció tulajdonságai.** Tetszőleges $F, G, H \in \mathbb{R}[[x]]$ formális hatványsorok esetén (ha mindkét oldal értelmezve van, akkor)

(i) $$(F+G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H),$$
(ii) $$(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H),$$
(iii) $$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H),$$
(iv) $$\left(\frac{F}{G}\right) \circ H = \frac{F \circ H}{G \circ H}.$$