A FIBONACCI-SZÁMOK ZÁRT ALAKJA

EMLÉKEZTETŐ. Az $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-sorozatot az $F_0 = F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$) lineáris rekurzióval definiáltuk.

ÁLLÍTÁS. *A fenti lineáris rekurzió megoldása, vagyis a Fibonacci-számok zárt alakja:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

BIZONYÍTÁS. Megoldjuk a lineáris rekurziót a tanultak szerint.

1. lépés: *Meghatározzuk a sorozat generátorfüggvényét.*
Legyen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Az

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \dots \\ -xF(x) &= \quad - F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - \dots \\ -x^2F(x) &= \qquad\qquad - F_0x^2 - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - \dots \end{aligned}$$

formális hatványsorokat összeadva az

$$(1 - x - x^2)F(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x$$

összefüggést kapjuk, mert az összeadás után a jobb oldalon a legalább másodfokú tagok együtthatóira az $F_n - F_{n-1} - F_{n-2}$ értékek adódnak ($n = 2, 3, 4, \dots$), melyek a definiáló rekurzió szerint 0-val egyenlők. Az $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$ kezdőértékek behelyettesítése után

$$(1 - x - x^2)F(x) = 1$$

adódik, ami a formális hatványsorok hányadosának definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

2. lépés: *„Parciális törtekre" bontjuk a kapott hányadost.*
Itt támaszkodhatunk az integrálszámításnál szerzett ismereteinkre, mert bár most formális hatványsorokkal számolunk (nem pedig racionális törtfüggvényekkel), hatványsorokra is érvényesek a felhasznált műveleti tulajdonságok.
Elsőfokú polinomok szorzatára bontjuk a nevezőt. (A komplex számtest felett az elsőfokú polinomok az irreducibilis polinomok.) Egy számolás szempontjából kényelmes alakot célszerű választani (vö. bizonyítás utáni megjegyzés), mi most a legmechanikusabb utat követjük. Az

$$1 - x - x^2 = 0$$

egyenlet két gyöke $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, amiből a nevező gyöktényezős alakja

$$1 - x - x^2 = (-1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + x\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x\right).$$

Vagyis a parciális törtek felírásához keressük tehát azokat az $A, B \in \mathbb{C}$ számokat, amelyekre

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + x\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x\right)} = \frac{A}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + x} + \frac{B}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x}.$$

Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-x\right)+B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+x\right)=1,$$

azaz az $[x^1]$ és $[x^0]$ együtthatókat összehasonlítva, ha A-ra és B-re teljesül, hogy

$$\begin{cases} -A+B=0 \\ A\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+B\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása $A=B=\frac{1}{\sqrt{5}}$, amiből

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-x}.$$

3. lépés: *Leolvassuk az együtthatókat.*
Mivel az $\frac{1}{1-y}$, illetve általában az $\frac{1}{(1-y)^n}$ alakú hatványsorok együtthatóit ismerjük (ezek az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok), ezért a nevezőkből kiemeljük a konstans tag együtthatóját, és utána leolvassuk a hatványsor együtthatóit. A törtekkel való számolás/gyöktelenítés részleteit mellőzve,

$$\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{-1+\sqrt{5}}x}\\ (*)\qquad &=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n. \end{aligned}$$

Tehát

$$F_n=[x^n]F=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).\qquad\square$$

Megjegyzés. A 3. lépésre való tekintettel a 2. lépésben kényelmesebb lehet úgy szorzattá alakítani a nevezőt, hogy az elsőfokú tényezőkben a konstans tagok 1-ek legyenek. (Ez megtehető, mert a nevezőben a konstans tag 1.) Másodfokú polinom esetén ez elvégezhető úgy is, hogy olyan teljes négyzetté alakítunk, amelyben a „maradéktag” másodfokú:

$$1-x-x^2=\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{5}{4}x^2=\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2=\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right).$$

Ezután

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

alakban keresve a felbontást, megkapjuk, hogy $A=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $B=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lesznek a számlálók, és ezzel eljutunk a $(*)$-gal jelölt sorban szereplő alakhoz …