KEDVENC FELADATAIM
megoldások

1. a) Az 1, 2, 3, 4, 5 számok a tükörképeikkel együtt.
b) A '8' szám 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os ill. 7-es számrendszerbeli alakjai.
c) A π számjegyei kettesével csoportosítva (tízes számrendszerben).
A feladat Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből c. könyvéből való.

2. Mivel nem lehet egyszerre enni és aludni, az utolsó étkezés és az utolsó alvás óta eltelt idő szükségképpen különbözik ...
A feladat Jurij B. Csernyak és Robert M. Rose: A minszki csirke c. könyvéből való.

3. Nem véletlenül maradt le a sakktábla számozása, ugyanis a fehér föntről halad lefelé, és a tábla sarkán álló bástya egy átváltozott gyalog, amely ütött egy fekete bábut (ez volt az utolsó lépés).
A feladat Raymond Smullyan: A hölgy vagy a tigris c. könyvéből való, de sok hasonlóan szellemes feladvány található a szerző Sherlock Holmes sakkrejtélyei c. könyvében.

4. Nyilván annak nagyobb a valószínűsége (2/3), hogy egy vigaszdíjat rejtő ajtót választottunk (és a másik ajtó mögött van az autó). Tehát érdemes változtatni.

5. A következő stratégiát követjük: Véletlenszerűen (1/2-1/2 valószínűséggel) választjuk ki azt a borítékot, amelyet kinyitunk, és ha ott az x számot találjuk, akkor p_x valószínűséggel maradunk ennél a borítéknál, illetve $1 - p_x$ valószínűséggel pártolunk át a másikra. A p_x valószínűségeket úgy választjuk meg, hogy az $x \mapsto p_x$ függvény szigorúan monoton növő legyen (vagyis minél nagyobb számot találunk, annál nagyobb valószínűséggel tartjuk meg); ez nyilván megtehető, csupán egy szigorúan monoton növő $\mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ függvényt kell megadni.
Ez jó stratégia lesz, ugyanis ha a borítékok az a és b számokat rejtik, ahol $a > b$, akkor a nagyobbik számot (az a-t) tartalmazó borítékot $\frac{1}{2}p_a + \frac{1}{2}(1 - p_b)$ valószínűséggel válaszjuk végül, mely valószínűség 1/2-nél nagyobb, hiszen $p_a > p_b$.

6. *1. megoldás:* Tegyük fel, hogy induláskor nem üres a tankunk, hanem van bőven benzinünk, ami egy kör megtételéhez elegendő. Induljunk el egy tetszőleges pontból, tegyünk meg egy kört, közben tankoljunk, ahol lehet. Persze amikor visszaérünk a kiindulási pontba, pontosan annyi benzinünk van, mint amennyivel indultunk, így körözhetünk az idők végezetéig (feltéve, hogy a benzinkutak újratöltődnek). Valahol a kör mentén (egy benzinkútnál a tankolás előtti pillanatban) minimális a benzinkészletünk: innen indulva üres tankkal is meg tudjuk tenni a kört.

2. megoldás: Benzinkutak száma (n) szerinti indukcióval:

$n = 1$ esetén az egyetlen benzinkút készlete elég egy kör megtételéhez, így innen induljunk.

$n + 1$ db benzinkút esetén van olyan $\mathcal{A}$ kút, amely elegendő (a liter) benzint tárol ahhoz, hogy a következő $\mathcal{B}$ kútig elérjünk (ellenkező esetben az összes benzinnel nem lehetne megtenni egy kört). Töröljük el a $\mathcal{B}$ kutat, és az itt tárolt b liter benzint csoportosítsuk át $\mathcal{A}$-hoz. Világos, hogy a megmaradó n kút továbbra is teljesíti a feladat feltételeit, így az indukciós feltevés miatt találunk olyan pontot, ahonnan indulva meg tudunk tenni egy kört. Tegyük meg ezt a kört! Amikor az $\mathcal{A}$ kútnál tankolunk $a + b$ litert, tegyünk félre egy kannába b litert és ne nyúljunk hozzá, amíg ex-$\mathcal{B}$-hez nem érünk (odáig a kanna tartalma nélkül is eljutunk, hiszen a liter is elég az $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{B}$-be jutáshoz). Ott pedig mi öntsük bele a b litert a tankunkba. Világos, hogy ezzel az eredeti $n + 1$ kutat szimuláltuk, amivel megoldottuk a problémát.

7. Fordítsuk le a programot, és meglátjuk . . .

8. A neten kering a következő C nyelvű egysoros:

```
char*s="char*s=%c%s%c;main(){printf(s,34,s,34);}";main(){printf(s,34,s,34);}
```

Megjegyzés: A `printf()` függvény használata miatt a forráskódnak tartalmaznia kellene egy `#include <stdio.h>` sort is, de a legtöbb C fordítóval így is szépen lefordul (és csak figyelmeztetést kapunk). Az ismertetett megoldást nem nehéz kibővíteni ezzel a sorral, felhasználva, hogy az újsor karakter ASCII kódja 10:

```
#include <stdio.h>
char*s="#include <stdio.h>%cchar*s=%c%s%c;%cint main(){printf(s,10,34,s,34,10,10);}%c";
int main(){printf(s,10,34,s,34,10,10);}
```

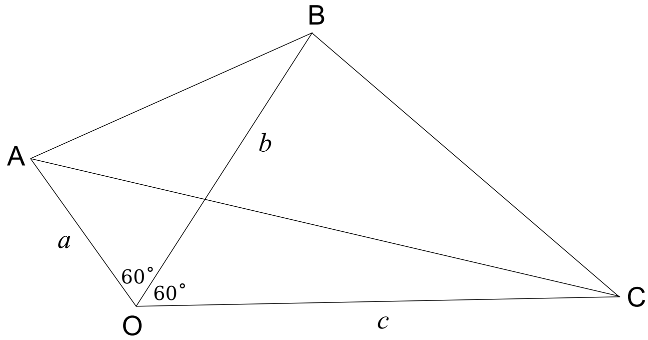
9. a) Indukcióval:
$n = 2$-re: Egyik felosztja a zsákmányt (szerinte) két egyenlő részre, a másik kiválasztja magának a (szerinte) nemkisebb értékűt.
Ha $n \geq 2$ ember el tudja osztani a kincset úgy, hogy mindegyik úgy gondolja, hogy megkapta legalább az $1/n$-ed részét, akkor tegyék azt. Ezután osszák fel a saját részüket saját megítélésük szerint $n + 1$ egyenlő részre. Majd hívják oda az $(n + 1)$-edik rablót, aki mind az n rablótól választ egy-egy darabot úgy, hogy mindegyik választáskor a szerinte legértékesebbet választja az $n + 1$ felkínált rész közül.
A megoldás előnye, hogy ha előre megállapodnak a módszerben, akkor a rablóknak nem érdemes csalni, amikor saját megítélésük szerint osztanak.

b) Legyenek a rablók $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$. Először $\mathcal{A}$ felosztja az aranyport 3 egyenlő részre. Ezután megkérdezi $\mathcal{B}$-től, hogy ha ez lenne a végleges felosztás, akkor ő mely darabokat fogadná el. (Azaz azt tudakolja, hogy $\mathcal{B}$ szemszögéből melyek a maximális értékű részek. Több maximális értékű is lehet.) Ha $\mathcal{B}$-nek legalább két rész elfogadható, akkor készen vagyunk: $\mathcal{C}$ kiválaszthatja a szerinte legértékesebbet, ezután $\mathcal{B}$-nek is megmarad legalább az egyik favoritja, $\mathcal{A}$ pedig elégedett az utolsó résszel is (ő úgy látja, hogy mindenki ugyanakkora értéket kapott). Ellenkező esetben $\mathcal{B}$ korrekciót fog végezni: Az egyetlen legértékesebb részből elvesz annyit, hogy az már csak „holtversenyben” legyen az első. (Az elvett mennyiséget egyelőre félretesszük.) Most már megismételhetjük az előző algoritmust: $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ majd $\mathcal{A}$ választ. Vizsgáljuk meg, hogy a jelenlegi felosztással elégedettek-e a rablók! (Azaz úgy gondolja-e mindegyik, hogy a(z egyik) legnagyobb rész lett az övé az eddig felosztott zsákmányból.) Vigyázat! $\mathcal{A}$ elégedettsége nem következik automatikusan a fenti gondolatmenetből (a többieké igen), ugyanis a csonkított részt $\mathcal{A}$ értéktelenebbnek gondolja a többinél. Mivel olyan felosztást szeretnénk, amelynél mindenki elégedett, *kikötjük*, hogy amennyiben $\mathcal{C}$ nem a csonkított darabot választotta, akkor $\mathcal{B}$ válassza azt (neki az megfelelő). De hogyan osszuk fel a félretett részt? Feltehetjük, hogy $\mathcal{B}$ kapta a csonkított részt. Fontos észrevétel, hogy $\mathcal{B}$ akármennyit is kap ezek után a félretett részből, $\mathcal{A}$ azt fogja gondolni, hogy $\mathcal{B}$ nem járt jobban nála. (Ne feledjük, hogy $\mathcal{A}$ szemében a csonkított darab a félretett résszel együtt ér annyit, mint a már birtokában lévő érték!) Tehát $\mathcal{A}$ végső elégedettségéhez elegendő, hogy $\mathcal{C}$ ne kapjon többet nála a félretett részből sem. A többiek végső elégedettségéhez elegendő, hogy a félretett rész felosztásánál is a(z egyik) legnagyobb darabot markolják fel saját megítélésük szerint. Ez pedig az eddigiek alapján egyszerűen megoldható: Most $\mathcal{C}$ fog harmadolni, majd a következő sorrendben választanak: $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$.

Megjegyzés: Több rabló esetén is elvégezhető a b)-beli felosztás, de az általános módszer komplikáltabb: http://www.eecs.harvard.edu/cs286r/courses/fall11/papers/BT95.pdf

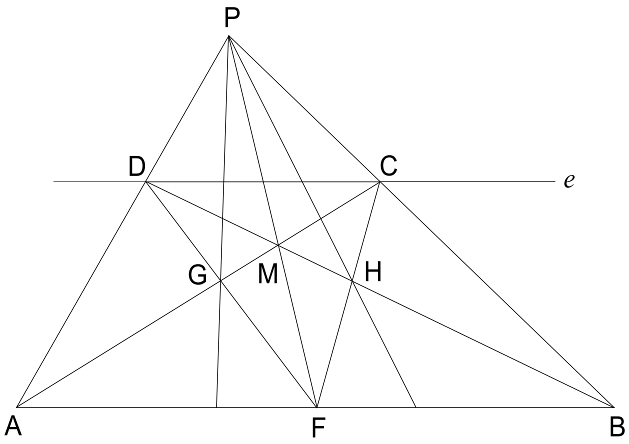
10. Könnyen meggondolható, hogy a gazosodási folyamat során a gazos területek összkerülete nem nőhet. (Összkerület alatt most azon kisnégyzet-oldalak számát értjük, melyek egy gazos és egy nem gazos területet határolnak.) Mivel kezdetben ez az összkerület legfeljebb $4(n-1)$, ezért nem gazosodhat el az egész tábla, hiszen a teljesen gazos állapot $4n$ összkerülete nem érhető el.

11. Vegyük fel a síkon O, A, B, C pontokat az ábrán látható módon! Ez lehetséges, mivel a, b, c nemnegatívak. Az (esetleg elfajuló) $ABC\triangle$-re felírt háromszög-egyenlőtlenség éppen a feladat állítása (a háromszög oldalait cos-tétellel kapjuk).

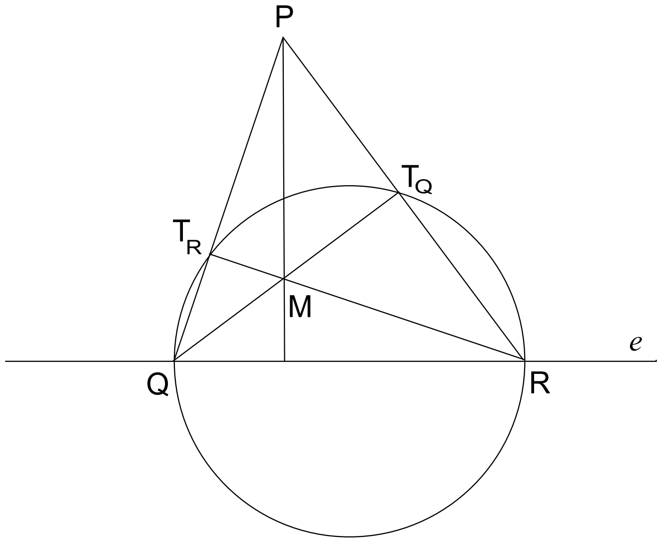


$|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$, $AOB\angle = BOC\angle = 60°$

12. a) Legyen az adott szakasz AB, az adott egyenes e. Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot az egyenes AB-t nem tartalmazó oldalán. Kössük össze P-t AB végpontjaival, az így e-n keletkezett metszéspontok legyenek D és C. Húzzuk be az $ABCD$ trapéz két átlóját, az ezek M metszéspontját P-vel összekötő egyenes AB-t annak F felezőpontjában metszi. Ugyanezt megismételjük $AFCD$ trapéz átlóinak G metszéspontjára és $FBCD$ trapéz H metszéspontjára. Az AB-n kapott két új pont harmadolja a szakaszt, melynek belátását az olvasóra bízzuk.



b) Egyetlen körzőzéssel megoldható a feladat. Legyen az adott egyenes e, az adott pont P. Rajzoljunk egy tetszőleges kört, amelynek középpontja e-n van, és P-t nem tartalmazza. A kör és e metszéspontjai Q és R. A PQ és PR egyenesek a körrel vett (Q-tól és R-től különböző) metszéspontjai T_R és T_Q. Thálesz tétele alapján QT_Q és RT_R a $PQR\triangle$ magasságvonalai, tehát egyeneseik M metszéspontja a háromszög magasságpontja. Így a keresett egyenes PM.

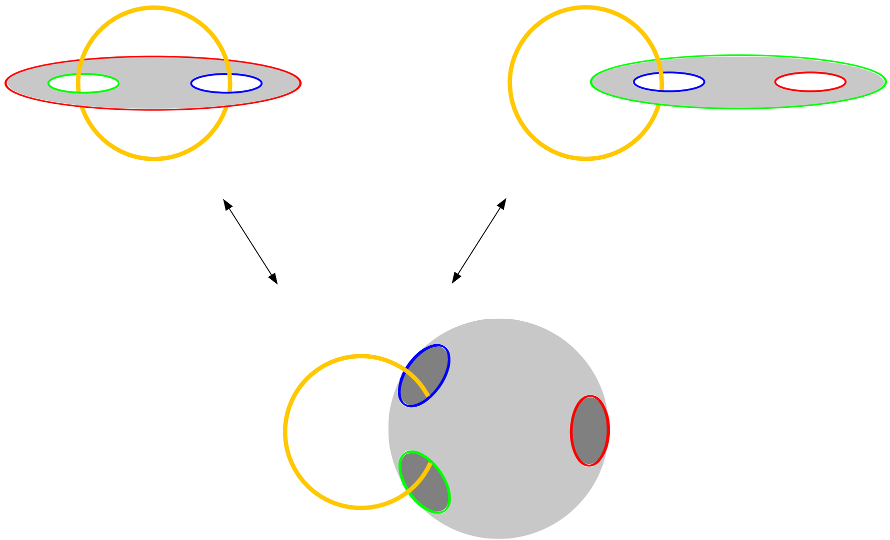


2. megoldás: Rajzoljunk egy P középpontú, e-t A-ban és B-ben metsző kört. Világos, hogy a keresett egyenes AB felezőmerőlegese, tehát ha AB F felezőpontját meg tudjuk szerkeszteni csak vonalzó használatával, akkor készen vagyunk. A feladat a) részének megoldása alapján ez megtehető, ha találunk egy e-vel párhuzamos egyenest. Ehhez mindössze tükrözni kell A-t és B-t P-re (azaz csupán be kell húzni AP és BP egyenesét, és tekinteni a körön keletkezett új metszéspontokat), az így kapott A' és B' egyenese rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.
Megjegyzés: A Poncelet-Steiner tétel szerint minden euklideszi szerkesztés elvégezhető csak vonalzóval, ha adott egy kör a középpontjával együtt.

13. Legyen $\mathcal{A}$ száma a, $\mathcal{B}$ száma b. Világos, hogy mindketten azon töprengenek, hogy a másik száma kétszerese vagy fele-e sajátjukénak. Figyeljük meg, hogy $\mathcal{A}$ pontosan akkor nem tudja elsőre kitalálni b-t, ha a páros és $2 \leq a \leq 50$ (ugyanis ekkor $2a$-ra és $a/2$-re is teljesül, hogy 1 és 100 közötti egész; ellenkező esetben pedig legfeljebb az egyikre). Vagyis $\mathcal{A}$ első kijelentése ekvivalens a *„Számom 50-nél nemnagyobb és páros.”* kijelentéssel, hiszen az előző gondolatmenetet $\mathcal{B}$ is végiggondolhatja. A fentiekhez hasonlóan az a tény, hogy $\mathcal{B}$ az ekvivalens alak hallatán sem tudja kitalálni $\mathcal{A}$ számát, azt jelenti, hogy b 4-gyel osztható és 25-nél nemnagyobb. Mivel $\mathcal{A}$ még ennek tudatában sem tudja kitalálni b-t, a 8-cal osztható és legfeljebb 12. Mivel egyetlen ilyen szám van, $\mathcal{B}$ most már tudja, hogy $a = 8$.
Kétféleképpen is látható, hogy b nem határozható meg ennyi információból. Egyrészt láttuk, hogy milyen és csak milyen feltételek mellett zajlik le a megadott párbeszéd, és világos, hogy 4 és 16 mindegyike teljesíti a b-re vonatkozó feltételt. Másrészt tegyük fel, hogy létezik olyan levezetés, amely eldönti a feladatból kinyerhető információk ismeretében, hogy $b = 4$ vagy 16. Ekkor ez a levezetés előadható úgy is, hogy nem használja „axiómaként” (kiinduló információként) $\mathcal{B}$ második diadalittas bejelentését, ami következik a többi alapinformációból (ezt a kijelentést eleve mi találtuk ki a többi alapinformáció segítségével). Azonban ezt a levezetést $\mathcal{A}$ is végiggondolhatja 2. kijelentése pillanatában, ami nyilvánvaló ellentmondás.

14. a) A feladat kissé módosított változata megoldással megtalálható itt (2. feladat): http://szjenoko.web.elte.hu/Jatek/fejtorok/fejtorok.html
b) Az előző rész megoldása után ez egy felesleges kérdés, de arra jó, hogy ellenőrizzük, valóban értjük-e a bizonyítást. Az egymondatos válasz az, hogy nem *közvetlenül* a vándor bejelentése ad plusz információt a férfiaknak, hanem az, hogy a *többi férfinak* adott-e plusz információt.
Ez legmarkánsabban az $n = 2$ esetben látszik (n a házaspárok száma), hiszen itt pont az jelenti új információt, hogy a másik férjnek sem mond újat a vándor (közvetlenül), azaz ő is lát hűtlen nőt. Az $n = 3$ esetben tudják, hogy közvetlenül nem jelent új információt senkinek a bejelentés. De pl. az $\mathcal{A}$ férfinak az már sokkoló, hogy ezt pl. $\mathcal{B}$ is tudta, vagyis hogy $\mathcal{B}$-nek az sem mondott újat, hogy $\mathcal{C}$-nek nem mondott újat a bejelentés ...

15. A trükk az, hogy nem „szabadítunk ki” egy lyukat sem. (Gondoljuk meg, ha csak egy lyuk lenne a gumin, reménytelen lenne a feladatunk. Bár ezt nem is annyira egyszerű precízen bizonyítani.) A jobb oldali ábrán látható szabad lyuk a *harmadik* lyuk. Milyen harmadik lyuk?! Úgy is tekinthetünk a két lyukkal rendelkező gumilapra, mint egy három lyukkal rendelkező gömbfelületre: Emlékezzünk vissza arra, amikor gyermekkorunkban szappanbuborékokat fújtunk, csak most a szappanhártyán van két lyuk is. Tehát a bal oldali állapotból elérhető az alsó állapot. Ahhoz, hogy ebből megkapjuk a jobb oldali állapotot, az előbbi felfújást visszafelé végezzük el, de most egy „foglalt” lyukba „gyömöszöljük vissza” a felfújt felületünket. (A jobb áttekinthetőség kedvéért az ábrán a felület határköreit különböző színekkel jelöltük.)



16. Két hölgy sugdolózva megállapodik egy szigorúan monoton növő (kódoló) függvényben. Majd külön-külön megsúgják a harmadik hölgynek, hogy ez a függvény milyen értéket rendel a saját életkorukhoz. A harmadik hölgy ezután bejelenti, hogy melyikük mondott nagyobb számot, amiből már mindenki tudja, hogy kettejük közül ő az idősebb. (A harmadik hölgy nem ismeri a kódoló függvényt, így a két hallott számból más információ nem derül ki számára.) Ezzel a módszerrel tetszőleges két hölgy életkor szerinti sorrendjét megállapíthatják (persze más-más kódoló függvényeket használva), így meg tudják oldani a feladatot.

17. *Segédfeladat:*
Egy méterrúdra n hangyát helyezünk, mindegyik a méterrúd valamelyik vége felé néz. A startpisztoly eldördülése után egyszerre indulnak közös állandó 1 $m/perc$ sebességgel. Ha két hangya találkozik, akkor mindketten abban a pillanatban megfordulnak, és változatlan sebességgel haladnak tovább. A hangyák a méterrúd végein leesnek. Legfeljebb mennyi ideig lesz hangya a méterrúdon?

A segédfeladat megoldása:
Tegyünk fáklyákat a hangyák kezébe, és a hangyák találkozáskor cseréljenek fáklyát! (Amikor egy hangya leesik, a fáklyát is viszi magával.) Ekkor a fáklyák 1 $m/perc$ sebességgel haladnak *irányváltoztatás nélkül*. Ebből következik, hogy mindegyik fáklya legfeljebb 1 percig tartózkodik a rúdon (1 percig akkor, ha az első gazdája a méterrúd egyik végéből a másik felé indult). Tehát legfeljebb 1 percig lesz hangya a méterrúdon.

18. Lépjünk ki a térbe! Tekintsük azt a 100 cm sugarú gömböt, amelynek az adott kör egy főköre. Indirekt módon tegyük fel, hogy 199 szalaggal lefedtük a körlapot. Nyilván feltehető, hogy a teljes 1 cm szélességet felhasználtuk minden szalagnál, és csak „hosszirányban" lógnak le a szalagok a körlapról. A szalagok körlapba eső részét vetítsük ki a gömbfelületre úgy, hogy a vetítés iránya merőleges a körlapra (a körlap belső pontjainak kettő vetülete lesz). A szalagok képe egy-egy 1 cm „vastag" gömböv lesz, amelyek felszíne egyenként 200π cm^2, függetlenül attól, hogy hol helyezkednek el. (Ez önmagában érdekes tény, hogy a gömböv felszíne csak az alapgömb sugarától és a metszősíkok távolságától függ.) Mivel a szalagok lefedik a körlapot, ezért a gömbövek lefedik a gömbfelületet, ami lehetetlen, ugyanis a 199 gömböv legfeljebb $199 \cdot 200\pi$ cm^2 felszínű felületdarabot fedhet le, a gömbünk felszíne pedig $200 \cdot 200\pi$ cm^2. Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

19. *Segítség:*
Helyezzük rá a „parkettázást” egy olyan sakktáblára, melyben a kis négyzetek oldalai $\frac{1}{2}$ egység hosszúak ...

20. A megoldás itt: http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoners_and_hats_puzzle