9.3.b. Határozzuk meg az $f(x) := \ln(1-x)$ függvény $a = 0$ körüli harmadrendű Taylor-polinomját és a (Lagrange-féle) maradéktagot, majd ezzel becsüljük meg $\ln\frac{1}{2}$ értékét és a közelítés hibáját.

Megoldás. Az előadáson tanultak szerint „elegendően szép" f függvény esetén, tetszőleges adott $a \in D_f$ számra

$$f(x) = \overbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{\text{az } a \text{ körüli } n\text{-edrendű Taylor-polinom (a közelítés)}} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}^{\text{a maradéktag (a hiba)}},$$

ahol ξ egy a és x közé eső szám. Tehát az $a = 0$ körüli harmadrendű ($n = 3$) Taylor-polinomra

$$(*) \qquad f(x) = \overbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3}^{\text{harmadrendű Taylor-polinom (a közelítés)}} + \overbrace{\frac{f''''(\xi)}{4!}x^4}^{\text{maradéktag}},$$

ahol ξ egy 0 és x közé eső szám.

Ahhoz, hogy be tudjunk helyettesíteni $(*)$-ba, ki kell számolni az f első, második, harmadik és negyedik deriváltját:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1-x) \\
f'(x) &= (\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}(-1) = -\frac{1}{1-x} = -(1-x)^{-1} \\
f''(x) &= (-(1-x)^{-1})' = -(-1)(1-x)^{-2}(-1) = -(1-x)^{-2} \\
f'''(x) &= (-(1-x)^{-2})' = -(-2)(1-x)^{-3}(-1) = -2(1-x)^{-3} \\
f''''(x) &= (-2(1-x)^{-3})' = (-2)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = -6(1-x)^{-4}.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ezeknél a deriválásoknál a (-1) szorzó az $1-x$ belső függvény deriváltja. Most behelyettesítünk:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln(1-0) = \ln 1 = 0 \\
f'(0) &= -(1-0)^{-1} = -\frac{1}{1} = -1 \\
f''(0) &= -(1-0)^{-2} = -\frac{1}{1^2} = -1 \\
f'''(0) &= -2(1-0)^{-3} = -2 \\
f''''(\xi) &= -6(1-\xi)^{-4} = -\frac{6}{(1-\xi)^4}.
\end{aligned}$$

A kiszámolt értékeket beírjuk $(*)$-ba, ezzel megkapjuk a Taylor-polinomot és a maradéktagot:

$$\ln(1-x) = \overbrace{0 + \frac{-1}{1}x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{-2}{6}x^3}^{\text{Taylor-polinom}} + \overbrace{\frac{-6}{(1-\xi)^4 \cdot 24}x^4}^{\text{maradéktag}},$$

ahol ξ egy 0 és x közé eső szám. Itt már beírtuk a faktoriálisok értékeit is ($k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$). Egyszerűsítés után

$$\ln(1-x) = \overbrace{-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}^{\text{Taylor-polinom}} + \overbrace{\frac{-1}{4(1-\xi)^4}x^4}^{\text{maradéktag}},$$

ahol ξ egy 0 és x közé eső szám. Ez a válasz az első kérdésre.

Az $\ln \frac{1}{2}$ becsléséhez behelyettesítünk $x = \frac{1}{2}$-et az imént kapott közelítésbe:

$$\ln \frac{1}{2} = \overbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3}^{\text{közelítés}} + \overbrace{\frac{-1}{4(1-\xi)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^4}^{\text{hiba}},$$

azaz

$$\ln \frac{1}{2} = \overbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}}^{\text{közelítés}} + \overbrace{\frac{-1}{64(1-\xi)^4}}^{\text{hiba}},$$

ahol $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. A közelítés hibájára

$$\left|\frac{-1}{64(1-\xi)^4}\right| = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^4} < \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{4}.$$

Az egyenlőtlenség azért teljesül, mert a törtet növeljük, ha a nevezőt csökkentjük, és $\xi < \frac{1}{2}$ miatt $1 - \xi > 1 - \frac{1}{2}$, amiből $(1-\xi)^4 > (1-\frac{1}{2})^4$. $\square$