9.1.) Függvényvizsgálat:

b.) $\boxed{f(x) = \sqrt{x}\ \ln x}$

É.T.: $x \geq 0$ ($\sqrt{x}$ miatt)
$\boxed{x > 0}$ ($\ln x$ miatt) $\Big\} \Longrightarrow D_f = (0, \infty)$.

tengelymetszetek: y-tengely: nincs (0-ban nincs értelmezve)
x-tengely: $\sqrt{x}\ \ln x = 0$

$\sqrt{x} = 0$ $\qquad$ $\ln x = 0$
$x = 0$ $\qquad$ $x = e^0$
nem m.o., 0-ban N.É! $\qquad$ $\underline{\underline{x = 1}}$.

határértékek:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underset{\downarrow \atop \infty}{\sqrt{x}}\ \underset{\downarrow \atop \infty}{\ln x} = \underline{\underline{\infty}}$$
"$\infty \cdot \infty = \infty$".

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underset{\downarrow \atop 0}{\sqrt{x}}\ \underset{\downarrow \atop -\infty}{\ln x}$$
$\leftarrow 0\cdot(-\infty)$ probléma, törtet csinálunk belőle L'Hospital miatt.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} =$$
$\frac{-\infty}{\infty}$ alakú, L'Hospital alkalmazható

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\left(-2(\sqrt{x})^3\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{3/2}}{x} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2x^{1/2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2\underset{\downarrow \atop 0}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$$

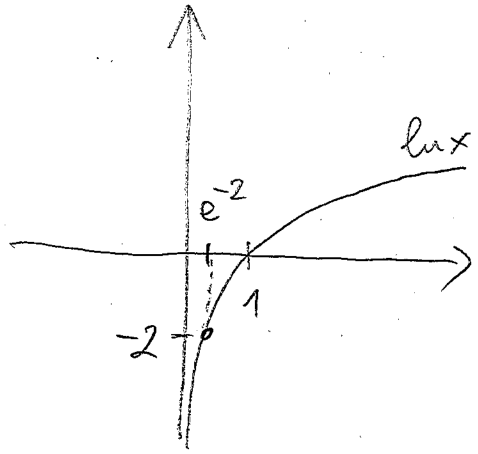
monotonitás:

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x}\ln x)' = (\sqrt{x})'\ln x + \sqrt{x}(\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{mindig pozitív}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$$

mindig pozitív $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\ln x + 1$ előjele adja f' előjelét.



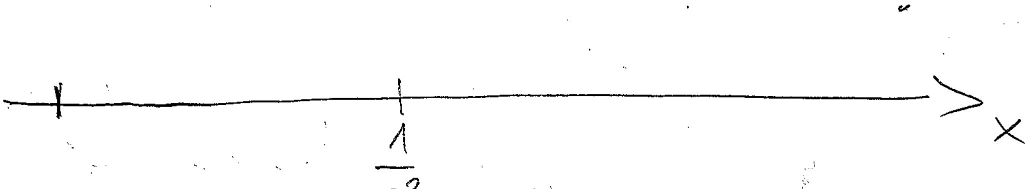
$$\frac{1}{2}\ln x + 1 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{2}\ln x > -1$$
$$\Updownarrow$$
$$\ln x > -2 \quad (\text{egyenlőség } x = e^{-2} \text{ esetén van})$$
$$\Updownarrow \text{ ln fgv. szig. mon. nő}$$
$$x > e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Kaptuk: $\frac{1}{2}\ln x + 1 > 0 \iff x > \frac{1}{e^2}$

Hasonlóan $\quad < \iff <$

$\qquad\qquad\quad = \iff =$

Tehát:



x:	$0 < x < \frac{1}{e^2}$	$x = \frac{1}{e^2}$	$x > \frac{1}{e^2}$
$f'(x)$:	$-$	0	$+$
$f(x)$:	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{e^2}}\ln\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e}\cdot\overbrace{\ln e^{-2}}^{=-2} = -\frac{2}{e}$$

Konvexitás:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)\right)'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)'$$

$$=-\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)=(*)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-1/2}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}$$

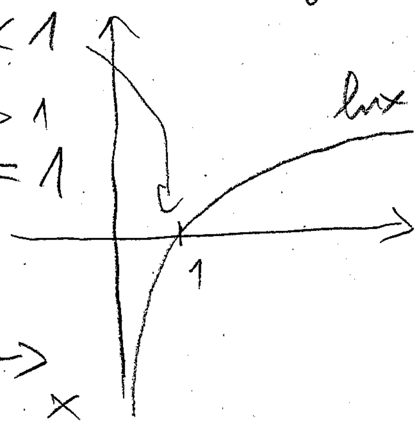
$$(*)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\ln x-\cancel{\frac{1}{2x\sqrt{x}}}+\cancel{\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\cdot\ln x.$$

$$(\sqrt{x})^3=\underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x}=x\sqrt{x}$$

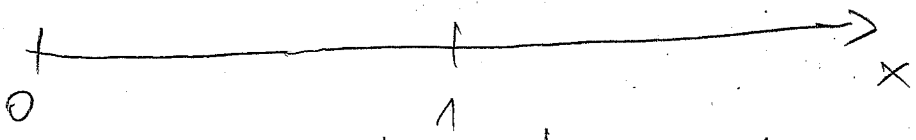
ez mindig +, ha $x>0$ (lásd. É.T.), ezért $-\ln x$ előjele adja f'' előjelét.

$$-\ln x>0 \iff \ln x<0 \iff x<1$$

hasonlóan:
$$-\ln x<0 \iff x>1$$
$$-\ln x=0 \iff x=1$$



Tehát

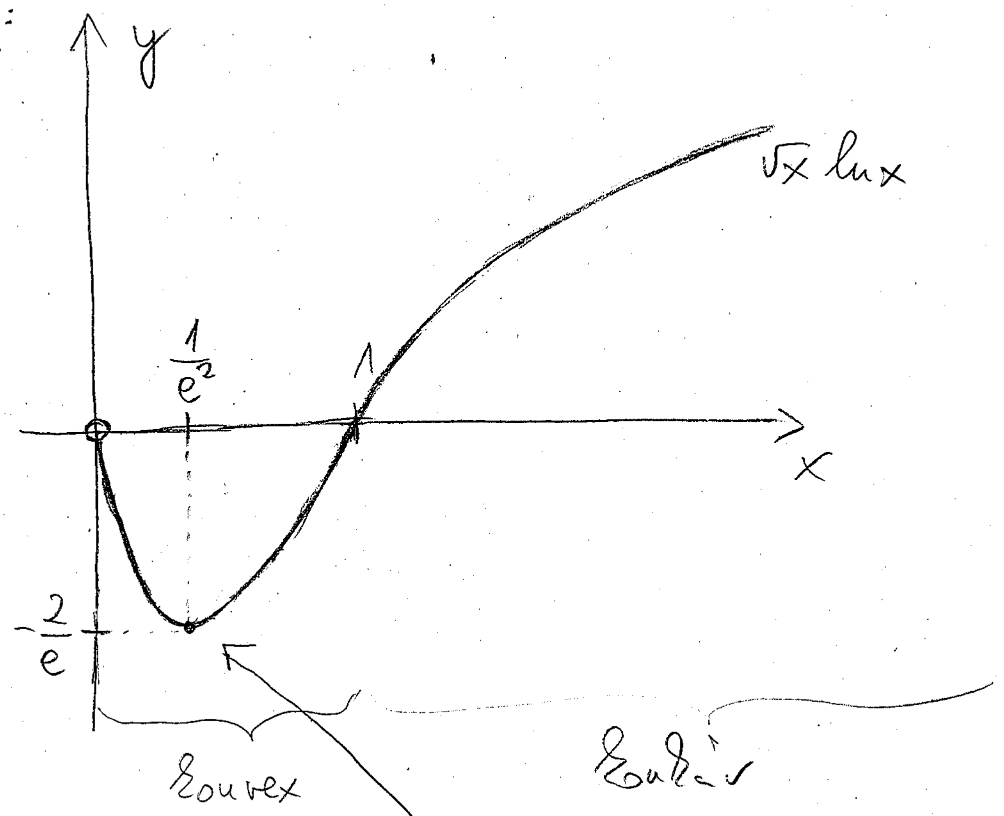


x	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪	0	∩

$x=1$ inflexiós pont.

$$f(1)=\sqrt{1}\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}=0$$

ábra:



szélsőértékek:

MINIMUM: $-\frac{2}{e}$ ($x=\frac{1}{e^2}$ helyen)

MAXIMUM: nincs, mert felülről nem korlátos (ui. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)

É.K.: $R_f = [-\frac{2}{e}, \infty)$

□

A továbbiakban csak a monotonitást és a konvexitást részletezem.

c.) $\boxed{f(x) = x\cdot e^{-1/x^2}}$ (← Ebben a feladatban a konvexitásvizsgálat nem könnyű.)

É.T.: $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

tengelyp.: y-tengely: nincs, x-tengely: nincs.

határértékek: (ezek nehezebbek)

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-1/x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-1/x^2} = \infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} x e^{-1/x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{-1/x^2} = 0$.

monotonitás:

$$f'(x) = (x e^{-1/x^2})' = x' e^{-1/x^2} + x \cdot \underbrace{(e^{-1/x^2})'} = e^{-1/x^2} + x \cdot e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

$$\left[e^{-1/x^2} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)'} = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \right.$$

$$\left. (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \right]$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^2} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} > 0, \text{ mindig pozitív!}$$

ez mindig pozitív

ez ≥ 1, hiszen $\frac{2}{x^2} > 0$

Tehát

x:	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$:	$+$	N.É.	$+$
$f(x)$.	$\nearrow$	N.É.	$\nearrow$

konvexitás:

$$f''(x) = \left(e^{-1/x^2}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\right)' = \underbrace{(e^{-1/x^2})'}_{\text{lásd fent}}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + e^{-1/x^2} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)'$$

$$\left(\frac{2}{x^2}\right)' = (2x^{-2})' = \ldots$$

$$= e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + e^{-1/x^2} \cdot \overbrace{(-4) \cdot \frac{1}{x^3}} =$$

$$= e^{-1/x^2}\left[\frac{2}{x^3}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{4}{x^3}\right] = e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} - \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= e^{-1/x^2}\left(\frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x^2} \frac{4 - 2x^2}{x^5}$$

ez mindig $+$

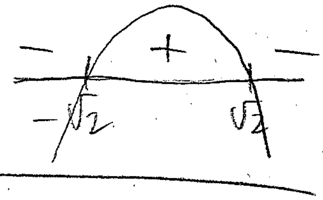
ennek az előjele kell.

$\frac{4-2x^2}{x^5}$ $\leftarrow$ számláló: lefelé nyíló parabola, $\pm\sqrt{2}$ zérushelyekkel

$\leftarrow$ nevező: $x^5 > 0 \iff x > 0$

$<\ \iff\ <$

$=\ \iff\ =$



$-\sqrt{2}$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\sqrt{2}$

x:	$x<-\sqrt{2}$	$x=-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt{2}$	$x=\sqrt{2}$	$x>\sqrt{2}$
$4-2x^2$:	−	0	+	+	+	0	−
x^5:	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{4-2x^2}{x^5}$:	+	0	−	N.É.	+	0	−

ez lesz f'' előjele is!

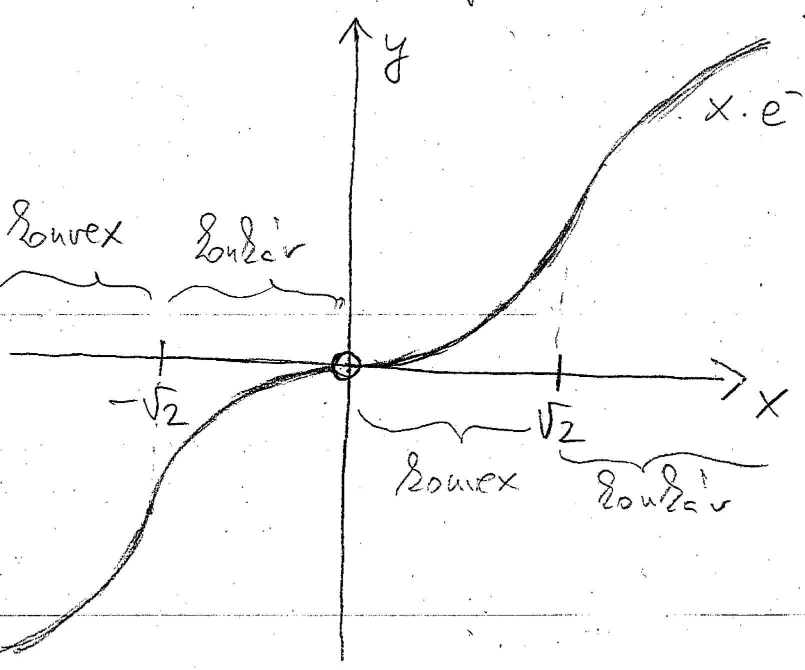
Tehát:

x:	$x<-\sqrt{2}$	$x=-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt{2}$	$x=\sqrt{2}$	$x>\sqrt{2}$
$f''(x)$:	+	0	−	N.É.	+	0	−
$f(x)$	$\cup$	$-\sqrt{2}\,e^{-1/2}$	$\cap$	N.É.	$\cup$	$\sqrt{2}\,e^{-1/2}$	$\cap$

$x=-\sqrt{2}$ inflexiós pont

$x=\sqrt{2}$ infl. pont

Rajz:



Szélsőért:

MIN: nincs.

MAX: nincs.

Értékkészlet:

$R_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

f.) $\boxed{f(x) = x\sqrt{8-x^2}}$.

É.T.: $8-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 8 \iff -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$.

Tehát: $D_f = [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$.

tengelymetszetek: y-tengely: 0

x-tengely: $-\sqrt{8}, 0, \sqrt{8}$.

határértékek: nem kell vizsgálni sehol, az értelmezési tartomány végpontjaiban is értelmezve van.

monotonitás:

$$f'(x) = \left(x\sqrt{8-x^2}\right)' = x'\sqrt{8-x^2} + x\cdot\left(\sqrt{8-x^2}\right)' = (*)$$

$$\left(\sqrt{8-x^2}\right)' = \left(\boxed{(8-x^2)}^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(8-x^2)^{-1/2}\cdot(8-x^2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{8-x^2}}.$$

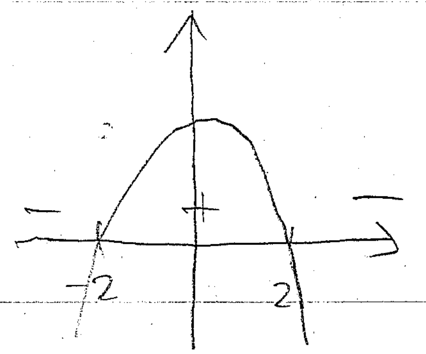
$$(*) = \sqrt{8-x^2} + x\cdot\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}} = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} =$$

$$= \frac{8-x^2-x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$ ← nevező mindig +, a számláló előjele dönt.

számláló: $8-2x^2$, lefelé nyíló parabola, zérushelyei: $8-2x^2=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$



Tehát: $-\sqrt{8}$ $\quad -2 \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad x$

x:	$x=-\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$x=2$	$2<x<\sqrt{8}$	$x=\sqrt{8}$
$f'(x)$:	ért. tart. végpontja	$-$	0	$+$	0	$-$	ért. tart. végpontja.
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0
			$\uparrow$ $f(-2)$		$\uparrow$ $f(2)$		

Konvexitás:

$$f''(x)=\left(\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}\right)'=\frac{(8-2x^2)'\sqrt{8-x^2}-(8-2x^2)\overbrace{\left(\sqrt{8-x^2}\right)'}^{\text{lásd előbb}}}{8-x^2}=$$

$$=\frac{-4x\sqrt{8-x^2}-(8-2x^2)\cdot\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2}=$$

számlálóban közös nevezőre hozás

$$\overset{\downarrow}{=}\frac{\frac{-4x(8-x^2)+x(8-2x^2)}{\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2}=$$

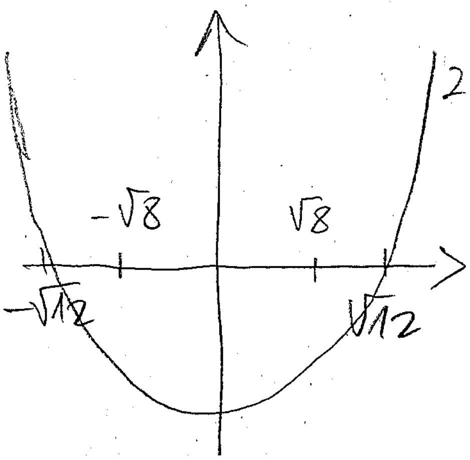
$$=\frac{-4x(8-x^2)+x(8-2x^2)}{\sqrt{8-x^2}\cdot(8-x^2)}=\frac{x\cdot\left(-4(8-x^2)+(8-2x^2)\right)}{\sqrt{8-x^2}\cdot(8-x^2)}$$

$$=\frac{x\cdot(2x^2-24)}{\sqrt{8-x^2}\,(8-x^2)}$$

ezek pozitívak, ha $-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}$, ezért a számláló előjele adja f'' előjelét.

A számláló előjelét kell vizsgálni.

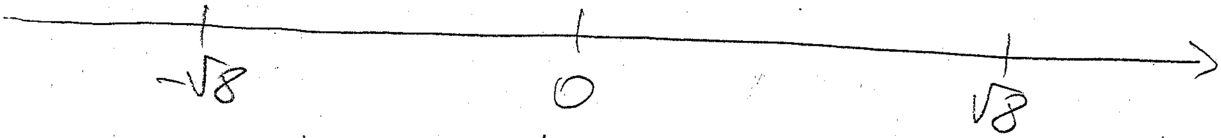
A 2. tényező: $2x^2-24$, felfelé nyíló parabola, $\pm\sqrt{12}$ zérushelyekkel.



← De $-\sqrt{12}$ és $\sqrt{12}$ is a $[-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$ intervallumon kívülre esik, így az egész $[-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$ értelmezési tartományon negatív a számláló 2. tényezője!

Ezért f'' előjele a számláló első tényezője (x) előjelének az ellentettje lesz, mivel $f''(x) = \frac{x \cdot \ominus}{\oplus}$

Tehát: ha $x > 0$, akkor $f''(x) < 0$;
ha $x = 0$, akkor $f''(x) = 0$;
ha $x < 0$, akkor $f''(x) > 0$.

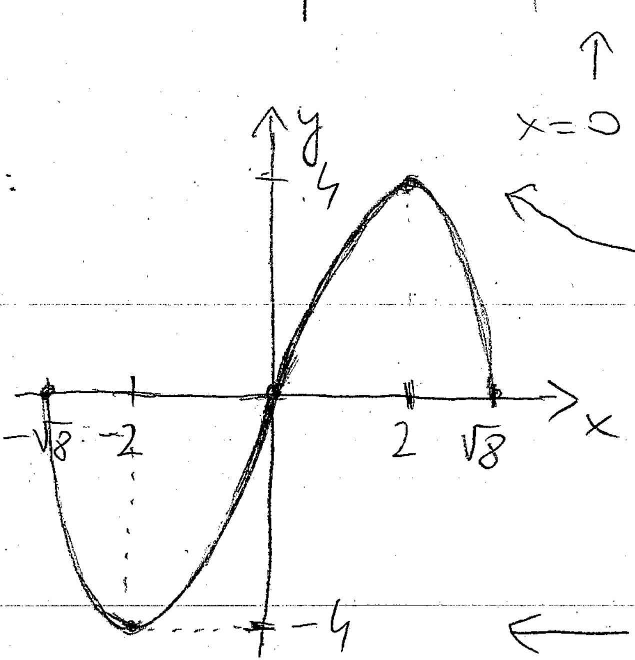


x:	$x=-\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt{8}$	$x=\sqrt{8}$
$f''(x)$:	É.T. bal végpontja	+	0	−	É.T. jobb végpontja
$f(x)$:	0	∪	0	∩	0

↑

$x=0$ inflexiós pont

Rajz:



maximum: 4 (az $x=2$ helyen)

értékkészlet: $R_f = [-4, 4]$.

minimum: -4 (az $x=-2$ helyen).