① Az $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{(2-x)^2}$ fgv. diszkussziója.

M.o.: 1.) Értelmezési tartomány:

nevező $\neq 0 \iff (2-x)^2 \neq 0 \iff 2-x \neq 0 \iff$

$x \neq 2$. Tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2.) Tengelymetszetek:

Az y-tengelyt az $f(0)=\dfrac{(1+0)^2}{(2-0)^2}=\underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$ pontban metszi a grafikon.

x-tengelymetszet: $\dfrac{(1+x)^2}{(2-x)^2}=0$

$\Updownarrow$

$(1+x)^2=0 \iff 1+x=0 \iff \underline{\underline{x=-1}}$

3.) Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+x)^2}{(2-x)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+2x+x^2}{4-4x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+1}{\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}+1}=\underline{\underline{1}}.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, hasonlóan.

$x=2$-ben nincs értelmezve a fgv., itt féloldali határértékeket számolunk:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{(1+x)^2}{(2-x)^2}=\text{"}\frac{3}{0^+}\text{"}=\text{"}\frac{\text{poz.}}{0^+}\text{"}=\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{(1+x)^2}{(2-x)^2}=\text{"}\frac{3}{0^+}\text{"}=\infty.$$

4.) Monotonitás:

$$f'(x)=\left(\frac{(1+x)^2}{(2-x)^2}\right)'=\frac{((1+x)^2)'(2-x)^2-(1+x)^2((2-x)^2)'}{(2-x)^4}\overset{*}{=}$$

$$\left[\begin{array}{l}((1+x)^2)'=2(1+x)\cdot 1=2+2x\\ ((2-x)^2)'=2(2-x)\cdot(-1)=2x-4\end{array}\right]$$

$$\overset{*}{=}\frac{(2+2x)(2-x)^2-(1+x)^2(2x-4)}{(2-x)^4}=$$

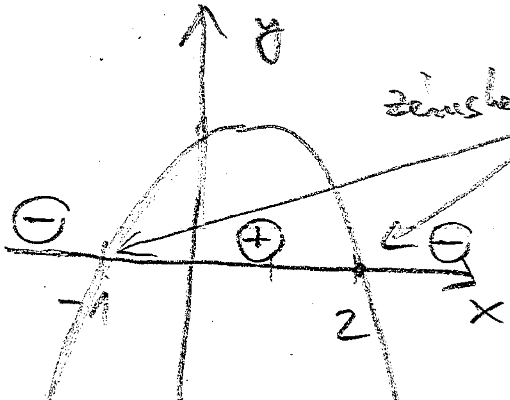
$$=\frac{(2+2x)(4-4x+x^2)-(1+2x+x^2)(2x-4)}{(2-x)^4}$$

$$=\frac{8-8x+2x^2+8x-8x^2+2x^3-(2x-4+4x^2-8x+2x^3-4x^2)}{(2-x)^4}$$

$$=\frac{-6x^2+6x+12}{(2-x)^4}$$

← a nevező mindig pozitív (ha $x\neq 2$), ezért a számláló előjele adja f' előjelét.

Számláló: $-6x^2+6x+12$ ← lefelé nyíló parabola (x^2 együtthatója $=-6$, negatív)



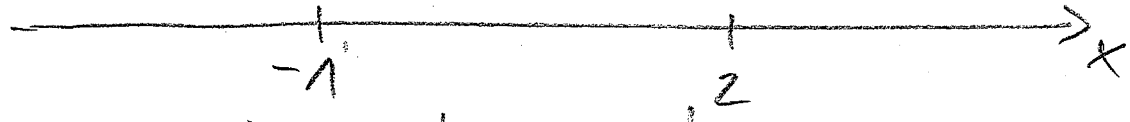
zérushelyek: $-6x^2+6x+12=0$

megoldóképlet

$x_1=-1$ $\qquad$ $x_2=2$

Ezzel megkaptuk f' előjelét: $(-1,2)$-n ⊕, stb.

Tehát



x:	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$:	$-$	0	$+$	N.É.	$-$
$f(x)$:	↘	0	↗	N.É.	↘

$$f(-1)=\frac{(1+(-1))^2}{(2-(-1))^2}=0$$

<u>lokális minimum</u> (előtte ↘, utána ↗).

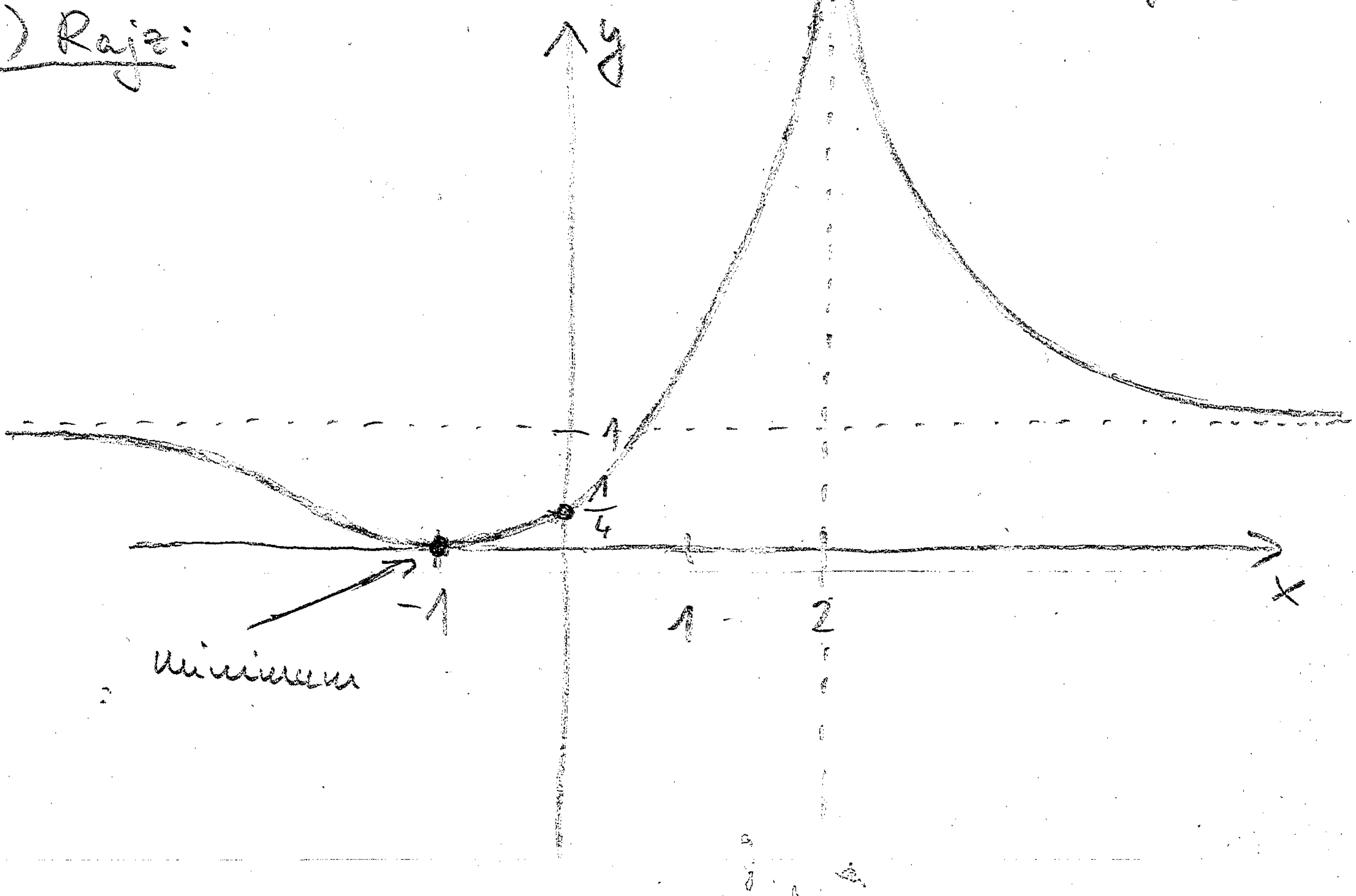
Mit tudunk eddig?

Az előző táblázatból: hol csökken, hol nő.

3.)-ból: „$-\infty$-ben" és „∞-ben" az 1 magassághoz simul hozzá; az $x=2$ hely bal és jobb oldalán is elszáll a ∞-be.

2.)-ből tudjuk, hogy hol metszi a tengelyeket.

<u>5.) Rajz:</u>



6.) <u>Szélsőértékek</u>:

A rajzról leolvasható, hogy a fgv. (globális) <u>minimuma</u> 0, amelyet $x=-1$-ben vesz fel.
Maximuma <u>nincs</u>, mert felülről nem korlátos.

7.) <u>Értékkészlet</u>: $R_f = [0, \infty)$, mintén az ábráról.
□

$\boxed{\text{2. feladat:}}$ $f(x) = x^2 \ln x$

<u>Megoldás</u>: Csak a határértékeket és a monotonitást részletezem.

1.) <u>Értelmezési tart.</u>: $\underline{D_f = (0, \infty)}$ ← ln miatt.

2.) <u>Tengelymetszetek</u>: y-tengely: <u>nincs</u> (0-ban N.É.)

x-tengely: $x^2 \ln x = 0$

$x^2 = 0$ vagy $\ln x = 0$

$\Updownarrow \qquad \qquad \Updownarrow$

nincs benne az ért. tart. ban → $\cancel{x=0}$ $\qquad \underline{x=1}$

3.) <u>Határértékek</u>: Az értelmezési tartomány bal széle a 0, ezért ott megvizsgáljuk a jobboldali határértéket ($-\infty$ helyett):

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln x} = ?$$

← „$0 \cdot (-\infty)$" probléma. Trükkösen hányadost csinálunk belőle, hogy alkalmazhassuk L'Hospitalt.

Tehát $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\downarrow\ \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=\infty}{1/x^2}} =$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x}^2 = \underline{\underline{0}}$$

$\frac{-\infty}{\infty}$ típus, L'Hospital alkalmazható

$$(1/x^2)' = (x^{-2})' = (-2x^{-3})' = -\frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{x^2}\,\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{\ln x} = \underline{\underline{\infty}}.$$

4.) <u>Monotonitás:</u>

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2(\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Mivel $x>0$ az É.T. miatt, ezért
<u>f' előjele megegyezik $2\ln x+1$ előjelével.</u>

$$2\ln x + 1 > 0$$

$$2\ln x > -1$$

$$\ln x > -\frac{1}{2} \qquad / \ln \text{ szig. monoton nő, és egyenlőség } x=e^{-1/2} \text{ esetén van.}$$

$$x > e^{-1/2}, \text{ azaz}$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Hasonlóan: $\underline{\underline{2\ln x + 1 < 0}} \underline{\underline{\iff}} \underline{\underline{x < \frac{1}{\sqrt{e}}}}$

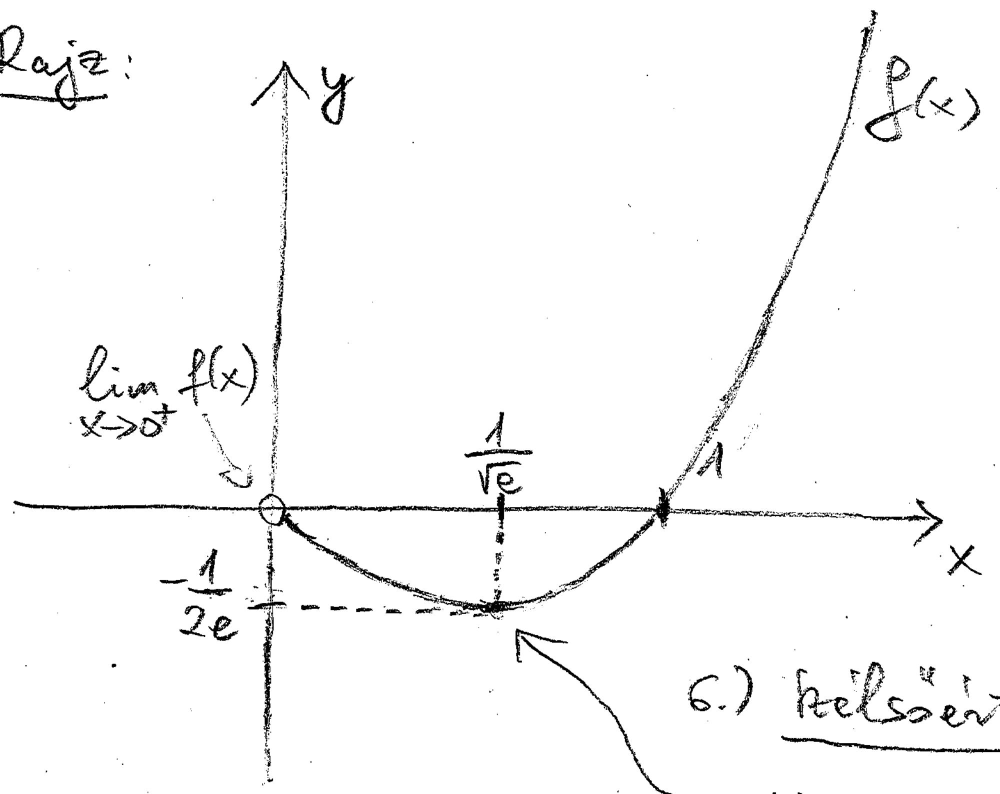
A táblázat:

x:	$0 < x < 1/\sqrt{e}$	$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{e}}$
$f'(x)$:	$-$	0	$+$
$f(x)$:	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

$$f(1/\sqrt{e}) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}_{\frac{1}{e}} \underbrace{\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}_{-1/2} = -\frac{1}{2e}$$

lokális minimum.

5.) Rajz:



6.) Szélsőértékek:

Minimum: $-\frac{1}{2e}$ (az $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ helyen)

Maximum: nincs, felülről nem korlátos.

7.) Értékkészlet: $R_f = [-\frac{1}{2e}, \infty)$.

$\square$