5.1.e. feladat

Tudnivalók. A $\frac{\text{nemnulla}}{0}$ típusú határértékeknél számoljunk féloldali határértéket. Ha a vizsgált függvénynek nem egyezik meg a jobboldali és a baloldali határértéke az adott pontban, akkor a függvénynek nincs határértéke ezen a helyen. (A jobboldali és a baloldali határétékek egyenlősége esetén pedig a „hagyományos” határérték is létezik, és a közös féloldali határétékkel egyezik meg.)

Jelölések. Az $x \to a^+$ jelölés azt jelenti, hogy „$x \to a$ és $x > a$”, tehát azt, hogy x az a-nál nagyobb számokon keresztül („jobbról”) tart a-hoz. Analóg módon, $x \to a^-$ pedig a „$x \to a$ és $x < a$” balról tartást jelenti. Mindkét esetben x helyén állhat más kifejezés is.

Szabályok. Hányados határértékének számolásánál

$$\frac{\text{pozitív}}{0^+} = \infty, \quad \frac{\text{negatív}}{0^+} = -\infty, \quad \frac{\text{pozitív}}{0^-} = -\infty, \quad \frac{\text{negatív}}{0^-} = \infty.$$

(A ∞ előjele könnyen megjegyezhető a törteknél megszokott előjelszabályokból.)

1. feladat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{4-x^2} = ?$$

Megoldás. Mivel $4-x^2 \to 0$, ha $x \to 2$, ez $\frac{1}{0}$ típusú, ezért féloldali határértékeket számolunk.

Jobboldali határérték:

HA $x \to 2^+$, azaz ha $x \to 2$ és $x > 2$,
AKKOR $4 - x^2 \to 0^-$, ugyanis ekkor $4 - x^2 \to 0$ (nyilván) és $4 - x^2 < 0$ is teljesül.
(Utóbbi $x > 2 \implies x^2 > 4 \implies 4 - x^2 < 0$ miatt.)
Tehát

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty, \qquad \text{mivel ez } \frac{1}{0^-} = \frac{\text{pozitív}}{0^-} \text{ alakú.}$$

Baloldali határérték:

HA $x \to 2^-$, azaz ha $x \to 2$ és $x < 2$,
AKKOR $4 - x^2 \to 0^+$, ugyanis ekkor $4 - x^2 \to 0$ (nyilván) és $4 - x^2 > 0$ is teljesül (ha x elég közel van már 2-höz).
(Az utolsó egyenlőtlenség indoklása: A $4 - x^2$ függvény grafikonja egy lefelé nyíló parabola -2 és 2 zérushelyekkel, amiből könnyen látható, hogy a $(-2, 2)$ intervallumon $4 - x^2 > 0$.)
Tehát

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = \infty, \qquad \text{mivel ez } \frac{1}{0^+} = \frac{\text{pozitív}}{0^+} \text{ alakú.}$$

Válasz:

Így a feladatbeli határérték **nem létezik**, mivel a két féloldali határérték különböző. □

Megjegyzés. Ennél a feladattípusnál a jobboldali határérték számolásakor azt, hogy a nevező határértéke 0^+ vagy 0^-, onnan tudjuk eldönteni, hogy milyen a nevező előjele a megadott ponttól nagyobb (közeli!) x-ekre. Baloldali határérték számolásakor pedig a nevező előjele kell a megadott ponttól kisebb (közeli!) x-ekre. Tehát a nevező előjelét kell tudni meghatározni, ami a korábbi órák anyagában szerepelt (előjeltáblázat, függvénygrafikon-vázlat stb.).

2. feladat.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2-2x} = ?$$

Megoldás. A nevező grafikonja egy felfelé nyíló parabola a 0 és 2 zérushelyekkel, amiből a $(-\infty, 0)$ intervallumon pozitív, a $(0, 2)$ intervallumon negatív, a $(2, \infty)$ intervallumon pedig pozitív a nevező. Ezt felhasználva,

Jobboldali határérték:

Ha $x \to 0^+$, akkor $x-1 \to -1$, és $x^2-2x \to 0^-$ (utóbbihoz lásd nevező előjele a $(0,2)$ intervallumon), tehát ekkor $\frac{x-1}{x^2-2x} \to \infty$, mivel $\frac{-1}{0^-} = \frac{\text{neg.}}{0^-}$ alakú.
Baloldali határérték:
Ha $x \to 0^-$, akkor $x-1 \to -1$, és $x^2-2x \to 0^+$ (utóbbihoz lásd nevező előjele a $(-\infty,0)$ intervallumon), tehát ekkor $\frac{x-1}{x^2-2x} \to -\infty$, mivel $\frac{-1}{0^+} = \frac{\text{neg.}}{0^+}$ alakú.
Válasz:
A feladatbeli határérték **nem létezik**, mivel a két féloldali határérték különböző. $\square$

3. feladat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2-2x} = ?$$

Megoldás. A nevező előjelét már megvizsgáltuk az előző feladatban: a $(-\infty,0)$ intervallumon pozitív, a $(0,2)$ intervallumon negatív, a $(2,\infty)$ intervallumon pedig pozitív a nevező. Ezt felhasználva,
Jobboldali határérték:
Ha $x \to 2^+$, akkor $x-1 \to 1$, és $x^2-2x \to 0^+$ (utóbbihoz lásd nevező előjele a $(2,\infty)$ intervallumon), tehát ekkor $\frac{x-1}{x^2-2x} \to \infty$, mivel $\frac{\text{poz.}}{0^+}$ alakú.
Baloldali határérték:
Ha $x \to 2^-$, akkor $x-1 \to 1$, és $x^2-2x \to 0^-$ (utóbbihoz lásd nevező előjele a $(0,2)$ intervallumon), tehát ekkor $\frac{x-1}{x^2-2x} \to -\infty$, mivel $\frac{\text{poz.}}{0^-}$ alakú.
Válasz:
A feladatbeli határérték **nem létezik**, mivel a két féloldali határérték különböző. $\square$