

5.1.a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = ?$

A nevezőben is ér a kalkuláción is az x a domináns tag (ha $x \rightarrow \infty$), mert $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $-1 \leq \cos x \leq 1$. Ezért x -et emeljük ki:

$$\frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1, \text{ ha } x \rightarrow \infty.$$

⊛ indoklás az orán megoldott 5.1. d / harmadik feladathoz hasonlóan törtelről:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 && /: x \\ -\frac{1}{x} &\leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, && \text{ha } \uparrow \underline{x > 0} \\ \downarrow (x \rightarrow \infty) &&& \downarrow (x \rightarrow \infty) \\ 0 &&& 0 \\ \Downarrow &&& \text{Rendőrelv} \\ \frac{\sin x}{x} &\rightarrow 0, && \text{ha } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ teljesen hasonlóan meg. \square