4.1. a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[5]{n^4+3n}+n} = ?$

Először gondolkodjunk! A számlálóból és a nevezőből is a nagyságrendet érdemes kiemelni, így ezek kitalálásával kezdjük.

<u>A nevező nagyságrendje:</u>

Nagy n-ekre $\sqrt[5]{n^4+3n} \underset{\uparrow}{\approx} \sqrt[5]{n^4} = n^{4/5}$.

a gyökjel alatt n^4 a domináns tag

Tehát a nevezőben az 1. tag nagyságrendje $n^{4/5}$, a 2. tag nagyságrendje n, így utóbbi a domináns (kitevőket összevetve: $4/5<1$), ez adja a nevező nagyságrendjét: n. $\leftarrow$ Ezt emeljük majd ki.

Hasonlóan, a <u>számláló nagyságrendje</u> $\sqrt[3]{n}$, ami a domináns 2. tagból jön.

Tehát
$$\frac{1-\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[5]{n^4+3n}+n} = \frac{\sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\sqrt[3]{\frac{n+2}{n}}\right)}{n\left(\sqrt[5]{\frac{n^4+3n}{n^5}}+1\right)} = \underbrace{\frac{\sqrt[3]{n}}{n}}_{\frac{n^{1/3}}{n}=\frac{1}{n^{2/3}}\to 0}\cdot\frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\to 0}-\sqrt[3]{1+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}}}{\sqrt[5]{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{3}{n^4}}_{\to 0}}+1}$$

$$\to 0\cdot\frac{0-\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt[5]{0+0}+1} = \underline{\underline{0}}, \text{ ha } n\to\infty.$$

$\square$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 2^{3n+1}-(-1)^n}{3+4\cdot 5^{n-1}} = ?$

$$\frac{4\cdot 2^{3n+1}-(-1)^n}{3+4\cdot 5^{n-1}} \overset{!}{=} \frac{8\cdot 8^n-(-1)^n}{3+\frac{4}{5}\cdot 5^n} = \frac{8^n\left(8-\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+\frac{4}{5}\right)} = \overbrace{\left(\frac{8}{5}\right)^n}^{\to\infty}\cdot\frac{8-\overbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)^n}^{(*)\ \to 0}}{\underbrace{\frac{3}{5^n}}_{\to 0}+\frac{4}{5}}$$

$$\to \infty\cdot\frac{8-0}{0+4/5} \text{ "=" } \text{„}\infty\cdot\text{pozitív"} = \underline{\underline{\infty}}, \text{ ha } n\to\infty.$$

Megjegyzések:

(!) Az első egyenlőséggel ezt használtuk:
$2^{3n+1} = 2 \cdot 2^{3n} = 2 \cdot 8^n$, illetve $5^{n-1} = \frac{5^n}{5}$.

(*) A $\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ sorozat az $\left(\frac{1}{8}\right)^n$ sorozat váltakozó előjelű változata. Utóbbi 0-hoz tart (mert $\frac{1}{8} < 1$), így a $\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ sorozat is.

Precízen: $\left|\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{8}\right)^n \to 0$, ha $n \to \infty$.

És ismert, hogy $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$;
Ebből következik, hogy $\left(-\frac{1}{8}\right)^n \to 0$, ha $n \to \infty$.

$\square$