h.)

$$\frac{n^2+4}{2n-3}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2+4}{2(n+1)-3}-\frac{n^2+4}{2n-3}=\frac{n^2+2n+5}{2n-1}-\frac{n^2+4}{2n-3}=$$

$$=\frac{(n^2+2n+5)(2n-3)-(n^2+4)(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)}=$$

$$=\frac{2n^3+4n^2+10n-3n^2-6n-15-2n^3+n^2-8n+4}{(2n-1)(2n-3)}=$$

$$=\frac{2n^3-2n^3+4n^2-3n^2+n^2+10n-6n-8n-15+4}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$=\frac{2n^2-4n-11}{(2n-1)(2n-3)}$$

$n=1$: $2n-1=1$, $2n-3=-1$ $\Rightarrow$ nevező <0

$2n^2-4n-11<0$ $\Rightarrow a_1<a_2$

Nevező: $n\geq 2$: ~~nevező~~ $2n-1>0$, $2n-3>0$ $\Rightarrow$ nevező >0

Számláló:

$n=2$: $2n^2-4n-11=4-8-11<0$ $\quad a_2>a_3$

$n=3$: $2n^2-4n-11=18-12-11<0$ $\quad a_3>a_4$

$n=4$: $2n^2-4n-11=32-16-11>0$

$n\geq 4$: $n^2-4n\geq 0$, $n^2-11>0$ $\Rightarrow$ számláló >0

$\Rightarrow a_n<a_{n+1}$ n

$a_1=\frac{5}{-1}=-5$

$a_2=\frac{8}{1}=8$

$a_3=\frac{13}{3}$

$a_4=\frac{20}{5}=4$

$\inf a_n=\min a_n=-5$

határérték: ∞ $\Rightarrow$ felülről nem korlátos

innen szigorúan nő $a_4<a_5<a_6<\dots$

c.) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \qquad n \geq 1$

Első észrevétel $a_n > 0$ minden n-re.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+6} - a_n = \frac{\left(\sqrt{a_n+6} - a_n\right)\left(\sqrt{a_n+6} + a_n\right)}{\sqrt{a_n+6} + a_n} =$$

$\times \frac{\sqrt{\ } +}{\sqrt{\ } +}$, hogy $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$-vel „szépítsünk"

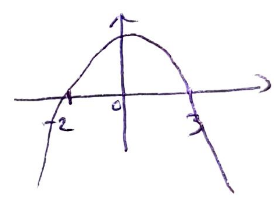
$$= \frac{\sqrt{a_n+6}^2 - a_n^2}{\sqrt{a_n+6} + a_n} = \frac{-a_n^2 + a_n + 6}{\sqrt{a_n+6} + a_n}$$

→ nevező: mindig > 0

→ számláló: lefele álló parabola

zérushelyei: $\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2}$

z.h.: -2 z.h.: 3



⇒ Ha $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

Ha $a_n = 3 \Rightarrow a_{n+1} = a_n = 3$

Ha $a_n > 3 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

Észrevétel: $a_1 = 1 < 3$ és ez így is marad hiszen

ha $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} < \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$

(indukció)

$\Rightarrow 0 < a_n < 3$ korlátos sorozat, mely szig. mon. nő

$\xRightarrow{\text{tétel}}$ a_n konvergens is $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

⇒ De $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$ szintén → $A = \sqrt{A+6}$

$A^2 - A - 6 = 0$ → $A_1 = -2$, $A_2 = 3$

⇒ Csak $A = 3$ lehetséges. Így $\inf a_n = \min a_n = a_1 = 1$ és $\sup a_n = \lim a_n = A = 3$ de ezt nem veszi fel.