3.2. Definíció szerint vizsgáljuk az alábbi sorozat határértékét:

$$\frac{n^3+1}{3+2n^2}.$$

Megoldás. Először meg kell sejtenünk, hogy mi a határérték. Nagy n-ekre a számlálóban az n^3 tag, a nevezőben a $2n^2$ tag a domináns (ezekben a legnagyobb az n kitevője), így nagy n-ekre

$$\frac{n^3+1}{3+2n^2} \approx \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2}.$$

Mivel $\frac{n}{2}$ minden határon túl nő az n növelésével, ezért azt sejtjük, hogy a keresett határérték ∞.

A **3.1.b.** feladatnál látottak szerint igazoljuk, hogy valóban

$$\lim \frac{n^3+1}{3+2n^2} = \infty.$$

Ehhez azt kell belátnunk, hogy tetszőleges K pozitív számhoz található olyan $N(K)$ szám, hogy minden $n > N(K)$ esetén $\frac{n^3+1}{3+2n^2} > K$.

Szóval legyen K tetszőleges pozitív szám. Az

$$\frac{n^3+1}{3+2n^2} > \frac{n^3}{3+2n^2} > \frac{n^3}{3n^2} = \frac{n}{3} > K$$

egyenlőtlenségláncban az első egyenlőtlenség minden n természetes számra teljesül; a második egyenlőtlenség pedig teljesül, ha $n > 2$ (mert ekkor $n^2 > 3$, és így $3n^2 > 3 + 2n^2$); az utolsó egyetlőnlenség pedig teljesül, ha $n > 3K$. Tehát az $N(K) = \max\{2, 3K\}$ választás megfelelő lesz, hiszen ekkor minden $n > N(K)$-ra fennáll, hogy $\frac{n^3+1}{3+2n^2} > K$ (lévén az egyenlőtlenségláncban mindegyik egyenlőtlenség teljesül), ahogy akartuk. $\square$