Racionális törtfüggvények integrálása (11.1.b feladat)

Általános recept.

1. lépés: Ha a számlálóban lévő polinom ugyanakkora vagy magasabb fokú, mint a nevező, akkor először leválasztjuk az egész részt (polinomosztással, lásd 2.4. feladattípus), és utána az érdemi rész már csak egy olyan racionális törtfüggvény integrálása, ahol a számláló a kisebb fokú.

2. lépés: Ha a számláló kisebb fokú, mint a nevező, akkor a következő típusok vannak (legfeljebb másodfokú nevező esetén):

- Ha a nevező lineáris (és a számláló konstans), akkor a lineáris nevezőre új változót bevezetve az $\frac{1}{y}$ integrálására vezethető vissza a feladat, $\ln|\dots|$ lesz az eredményben.
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek különböző gyökei vannak, akkor szorzattá alakítjuk a nevezőt, és elemi törtek összegére bontjuk a törtet (ld. 2.5. feladattípus), és az elemi törtek már könnyen integrálhatók az előző pont szerint.
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek két egyforma gyöke van, akkor a nevező egy lineáris kifejezés négyzete, és erre a lineáris kifejezésre új változót bevezetve, az $\frac{1}{y^2}$ integrálására vezet a feladat: $\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}$. (Ha a számláló elsőfokú, akkor átírjuk $ay+b$ alakba, például polinomosztással …)
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek nincs gyöke, akkor a nevező teljes négyzetté alakítása után az $\frac{1}{y^2+1}$ integrálására vezet a feladat, ezért megjelenik az arctg. (Ha a számláló elsőfokú, akkor átírjuk $ay+b$ alakba, például polinomosztással …)

A 10.1.b-ből és 11.1.b-ből kimaradt feladatok.

1.

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. A fenti recept szerint legyen az új változó

$$y = 1-x.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -1\\ \mathrm{d}y &= (-1)\,\mathrm{d}x\\ (-1)\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

és így

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\cdot(-1)\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\ln|y| = \boxed{-\ln|1-x|}.$$

□

2.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Legyen

$$y = 2x+5.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2\\ \mathrm{d}y &= 2\,\mathrm{d}x,\\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x\end{aligned}$$

és így

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln|y| = \boxed{\frac{1}{2}\ln|2x+5|}.$$

□

3.
$$\int \frac{x+3}{x-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Most először leválasztjuk az egész részt (mivel a számláló nem alacsonyabb fokú, mint a nevező), és utána az előző feladatok alapján járunk el. Az egész rész leválasztása polinomosztással történik, de ez most ránézésre is könnyen megy:

$$\int \frac{x+3}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-1)+4}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x =$$
$$x + 4\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{x+4\ln|x-1|}.$$

Az utolsó lépésben az $\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1|$ integrál $y = x-1$ helyettesítéssel könnyen megkapható a korábbi példák mintájára ($\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ lesz). □

4.
$$\int \frac{3}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. A nevezőnek mindkét gyöke 1, tehát a nevező egy négyzet:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Tehát

$$\int \frac{3}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{y^2}\,\mathrm{d}y = 3\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = 3\cdot\frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{3}{y} = \boxed{-\frac{3}{x-1}},$$

ahol a második egyenlőségnél $y = x-1$-et helyettesítettünk a recept alapján (és ekkor $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$). □

5.
$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Most a nevezőnek nincs gyöke, ezért teljes négyzetté alakítunk:

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1.$$

Ezt felhasználva,

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y = \boxed{\operatorname{arctg}(x-3)},$$

ahol $y = x-3$-at helyettesítettünk (és ekkor $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$). □

6. $$\int \frac{1}{x-x^3}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. A nevező könnyen szorzattá alakítható:

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)}.$$

Ez a feladat azt illusztrálja, hogy ha a nevező (különböző) elsőfokú tényezők szorzatává bomlik, és a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező, akkor az elemi törtekre bontás több tényező esetén is működik. Vagyis

$$\frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

alakban keressük az elemi törtekre bontást (az A, B, C számokat kell meghatározni). A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, és az x-es tagok kitevője szerint csoportosítunk a számlálóban:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{A(1-x)(1+x) + Bx(1+x) + Cx(1-x)}{x(1-x)(1+x)} =$$
$$\frac{A(1-x^2) + B(x+x^2) + C(x-x^2)}{x(1-x)(1+x)} = \frac{(-A+B-C)x^2 + (B+C)x + A}{x(1-x)(1+x)}.$$

Azt akarjuk, hogy a kapott tört számlálójában 1 álljon. Ez akkor teljesül, ha az x^2 együtthatója 0, az x együtthatója szintén 0, az A konstans tag pedig 1. Vagyis a következőnek kell teljesülnie:

$$\begin{cases} -A + B - C = 0 \\ B + C = 0 \\ A = 1. \end{cases}$$

Ez az egyenletrendszer könnyen megoldható. A 3. egyenlet egyből megadja A-t; ezt és $B = -C$-t az elsőbe helyettesítve megkapjuk C-t, és ebből B-t: $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x},$$

és így

$$\int \frac{1}{x-x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|}.$$

Itt az $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|1-x|$ és $\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x|$ integrálokat a korábban látottak szerint számoltuk ki ($y = 1-x$, illetve $y = 1+x$ helyettesítésekkel). □