Racionális törtfüggvények integrálása (11.1.b feladat)

Általános recept.

1. lépés: Ha a számlálóban lévő polinom ugyanakkora vagy magasabb fokú, mint a nevező, akkor először leválasztjuk az egész részt (polinomosztással, lásd 2.4. feladattípus), és utána az érdemi rész már csak egy olyan racionális törtfüggvény integrálása, ahol a számláló a kisebb fokú.
Ha a számláló kisebb fokú, mint a nevező, akkor a következő típusokat vettük:

- Ha a nevező lineáris, akkor $\frac{1}{x}$-re vezethető vissza az integrál, $\ln|\dots|$ lesz az eredményben.
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek különböző gyökei vannak, akkor szorzattá alakítjuk a nevezőt, elemi törtekre bontjuk a törtet, és az elemi törtek már könnyen integrálhatók az előző altípus szerint.
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek két egyforma gyöke van, a számláló pedig konstans, akkor a nevezőre négyzet alakban tekinthetünk, és $\frac{1}{x^2}$ integrálására vezethető vissza a feladat.
- Ha a nevező olyan másodfokú, aminek nincs gyöke, akkor a nevező teljes négyzetté alakítása után az $\frac{1}{x^2+1}$ integrálására vezet a feladat, ezért megjelenik az arctg.

A 11.1.b-ből kimaradt feladatok. (Az utolsó kettő nem kell, ezeket majd a következő gyakon nézzük meg.)

1. a)
$$\int \frac{1}{3x+4}\,\mathrm{d}x = ?$$

b)
$$\int \frac{5-x}{3-x}\,\mathrm{d}x = ?$$

c)
$$\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Ezeket a típusokat már láttuk a **10.1.b** feladatnál, és ezek „lineáris belső függvénnyel" alapintegrálra vezethetők vissza. Most a gyakorlás kedvéért helyettesítéses integrálással oldjuk meg őket (a „lineáris belső függvény" típusú feladatokat helyettesítéssel mindig ki tudjuk integrálni: az új változó legyen a lineáris belső függvény).

Az **a)** feladatnál legyen az új változó

$$y = 3x+4.$$

Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$$
$$\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x,$$
$$\frac{1}{3}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

és így

$$\int \frac{1}{3x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\ln|y| = \boxed{\frac{1}{3}\ln|3x+4|}.$$

A **b)** feladatnál először leválasztjuk az egész részt (mivel a számláló nem alacsonyabb fokú, mint a nevező), majd az előzőek szerint járunk el:

$$\int \frac{5-x}{3-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(3-x)+2}{3-x}\,\mathrm{d}x = \int\left(1+\frac{2}{3-x}\right)\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \int\frac{2}{3-x}\,\mathrm{d}x =$$
$$x + 2\int\frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{x-2\ln|3-x|}.$$

Az utolsó lépésben az $\int \frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|3-x|$ integrál például $y = 3-x$ helyettesítéssel könnyen megkapható ($-\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ lesz).

A **c)** feladatnál a nevezőnek mindkét gyöke 3, tehát a nevező egy négyzet:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2.$$

Tehát

$$\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y} = \boxed{-\frac{1}{x-3}},$$

ahol a második egyenlőségnél $y = x-3$-at helyettesítettünk (és ekkor $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$). □

2.

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Most a nevezőnek nincs gyöke, ezért teljes négyzetté alakítunk:

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1.$$

Ezt felhasználva,

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y = \boxed{\operatorname{arctg}(x-3)},$$

ahol ismét $y = x-3$-at helyettesítettünk (és ekkor $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$). □

3.

$$\int \frac{1}{x-x^3}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. A nevező könnyen szorzattá alakítható:

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)}.$$

Ez a feladat azt illusztrálja, hogy ha a nevező (különböző) elsőfokú tényezők szorzatává bomlik, és a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező, akkor az elemi törtekre bontás több tényező esetén is működik. Vagyis

$$\frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

alakban keressük az elemi törtekre bontást (az A, B, C számokat kell meghatározni). A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, és az x-es tagok kitevője szerint csoportosítunk a számlálóban:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{A(1-x)(1+x) + Bx(1+x) + Cx(1-x)}{x(1-x)(1+x)} =$$
$$\frac{A(1-x^2) + B(x+x^2) + C(x-x^2)}{x(1-x)(1+x)} = \frac{(-A+B-C)x^2 + (B+C)x + A}{x(1-x)(1+x)}.$$

Azt akarjuk, hogy a kapott tört számlálójában 1 álljon. Ez akkor teljesül, ha az x^2 együtthatója 0, az x együtthatója szintén 0, az A konstans tag pedig 1. Vagyis a következőnek kell teljesülnie:

$$\begin{cases} -A + B - C = 0 \\ \qquad\quad B + C = 0 \\ \qquad\qquad\; A = 1. \end{cases}$$

Ez az egyenletrendszer könnyen megoldható. A 3. egyenlet egyből megadja A-t; ezt és $B = -C$-t az elsőbe helyettesítve megkapjuk C-t, és ebből B-t: $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{1}{x - x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x},$$

és így

$$\int \frac{1}{x - x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|}.$$

Itt az $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|1-x|$ és $\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x|$ integrálokat a korábban látottak szerint számoltuk ki ($y = 1 - x$, illetve $y = 1 + x$ helyettesítésekkel). $\square$