Parciális integrálás (11.1.a feladattípus)

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

1.
$$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Az xe^{3x} szorzatra $e^{3x}x$-ként tekintünk, és parciálisan integrálunk. Azaz legyen

$$f'(x) = e^{3x}$$
$$g(x) = x.$$

Ekkor
$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x}$$
a korábbiak (pl. 10.1.a feladattípus) alapján. Parciális integrálással tehát azt kapjuk, hogy

$$\int e^{3x}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x}x - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}},$$

ahol az utolsó lépésben újra felhasználtuk, hogy $\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x}$. □

2.
$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. Az integrálandó függvényre $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$ alakban tekintünk, és parciálisan integrálunk. Azaz legyen

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g(x) = \ln x.$$

Ekkor
$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}.$$

Parciális integrálással tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}},$$

ahol az utolsó lépésben újra felhasználtuk, hogy $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}$. □