Helyettesítéses integrálás (10.1.c feladat)

1.
$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás. A köbgyök alatti kifejezés mindig ígéretes jelölt belső függvénynek (új változónak). Ez most működni is fog, mert $(x^2+2x)' = 2x+2$, a feladatbeli számláló pedig épp ennek az $1/2$-szerese, azaz tekinthető az x^2+2x belső függvény deriváltjának (pontosabban annak konstansszorosának); a megmaradó $1/\sqrt[3]{y}$ külső függvény (konstansszorosa) pedig kiintegrálható.
Tehát legyen
$$y = x^2 + 2x.$$
Ekkor
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x+2$$
$$\mathrm{d}y = (2x+2)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{d}y = (x+1)\,\mathrm{d}x,$$
és így
$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}(x+1)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{2}\int y^{-1/3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{4}y^{2/3} = \frac{3}{4}(x^2+2x)^{2/3}.$$
□

2.
$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

(A feladatsorban el van gépelve a feladat.)

Megoldás. A cos argumentuma is mindig ígéretes új változó jelölt. És mivel $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ezért a feladatbeli nevező felfogható a belső függvény deriváltjával (pontosabban a $2/3$-szorosával) való szorzásnak. Tehát legyen
$$y = \sqrt{x}.$$
Ekkor
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$
és így
$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \cos y\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int \cos y\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\sin y = \frac{2}{3}\sin\sqrt{x}.$$
□