Lineáris belső függvény
(Segédanyag a 10.1.a-b feladattípusokhoz)

Összefoglaló. A **10.1.a-b** feladatainak többsége visszavezethető *lineáris helyettesítéssel* valamelyik alapintegrálra. Az alapintegrálokat a kiosztott segédanyagon találjuk, vagy például itt:
https://www.mathreference.org/index/page/id/55/lg/hu
A lineáris helyettesítés alatt azt értem, hogy a feladatbeli integrálandó függvény az integrálási táblázatban szereplő valamelyik alapfüggvényből kapható úgy, hogy x helyére $ax + b$ alakú belső függvényt írunk, valamely a és b konkrét számokkal. Ilyenkor úgy járunk el, hogy az integrálási szabálygyűjteményben a megfelelő primitív függvénybe is $(ax+b)$-t helyettesítünk, és ilyen alakban keressük a megoldást, ami egy konstans szorzóval való korrigálás után jó lesz (a-val kell osztani, de ezt inkább jobb végiggondolni).

Példa. Nézzünk egy konkrét példán:

$$\int \cos(3x-4)\mathrm{d}x = ?$$

Látjuk, hogy az integrálandó $\cos(3x-4)$-et a $\cos x$-ből kapjuk úgy, hogy x helyébe a $3x-4$ (lineáris) belső függvényt írjuk. A képletgyűjteményben látjuk, hogy

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (*)$$

A fenti összefoglaló szerint tehát $\sin(3x-4)$-gyel próbálkozunk (a képletgyűjteményből kiolvasott $\sin x$ primitív függvényben is $(3x-4)$-et írva x helyére):

$$(\sin(3x-4))' = \cos(3x-4)\cdot 3, \qquad (**)$$

amit az összetett függvény deriválási szabálya szerint kaptunk $(*)$-ból (a 3-as szorzó a belső függvény deriváltja).
Emlékezzünk, hogy az a feladatunk, hogy találjuk egy olyan függvényt, amelynek a deriváltja $\cos(3x-4)$. Látjuk $(**)$-ból, hogy a $\sin(3x-4)$ már „majdnem jó”, mert a deriváltja a kívánt eredmény 3-szorosa. Ezt ugyanis könnyen korrigálhatjuk, ha elosztjuk a $\sin(3x-4)$ függvényt 3-mal (ami a konstans 1/3-dal szorzásnak felel meg, ezért a derivált is 3-dal osztódik):

$$\left(\frac{1}{3}\sin(3x-4)\right)' = \frac{1}{3}(\sin(3x-4))' = \frac{1}{3}(\cos(3x-4)\cdot 3) = \cos(3x-4),$$

tehát találtunk egy primitív függvényt:

$$\boxed{\int \cos(3x-4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x-4).}$$

Megjegyzés. Ha már magabiztosan megy a helyettesítés integrálás, akkor a fentiek úgy foglalhatók össze, hogy ezek a feladattípusok az $y = ax + b$ helyettesítéssel mindig megoldhatók.

Az órán kimaradt feladatok megoldásai

1. $\int \sin(x+3)\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. A $\sin(x+3)$ függvényt a $\sin x$-ből kapjuk $x \leftsquigarrow x+3$ után. Mivel a $\sin x$ primitív függvénye $-\cos x$, ezért $-\cos(x+3)$-mal próbálkozunk ($x \leftsquigarrow x+3$ itt is):

$$(-\cos(x+3))' = \sin(x+3)\cdot 1 = \sin(x+3),$$

ahol az 1-es szorzó $(x+3)'$-ból jön. Ezzel meg is találtunk egy primitív függvényt:

$$\int \sin(x+3)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\cos(x+3)}.$$

Ugyanez formálisan, helyettesítéses integrálással. Ha észrevesszük, az integrálandó függvény egy alapintegrálba mint külső függvénybe helyettesített *lineáris* belső függvény, akkor mindig célt érünk helyettesítéses integrálással, amennyiben az észrevett lineáris belső függvényre vezetjük be az új változót. Az előző megoldás alapján tehát legyen

$$y = x+3.$$

Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

és így

$$\int \sin(x+3)\,\mathrm{d}x = \int \sin y\,\mathrm{d}y = -\cos y = \boxed{-\cos(x+3)}.$$

2. $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Az e^{-x} függvényt az e^x-ből kapjuk $x \leftsquigarrow -x$ után (a $-x$ is lineáris belső függvény!). Mivel az e^x primitív függvénye e^x, ezért e^{-x}-szel próbálkozunk:

$$(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-1).$$

Látjuk, hogy (-1)-gyel kell még osztanunk (vagy szoroznunk, ami ugyanaz), hogy jó legyen:

$$(-e^{-x})' = e^{-x},$$

azaz

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{-e^{-x}}.$$

Ugyanez formálisan, helyettesítéses integrálással. Az előző megoldás első észrevétele alapján legyen

$$y = -x.$$

Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$$

$$\mathrm{d}y = (-1)\mathrm{d}x$$

$$(-1)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

és így

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int e^{y} \cdot (-1)\,\mathrm{d}y = -\int e^{y}\,\mathrm{d}y = -e^{y} = \boxed{-e^{-x}}.$$

3. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Ahhoz, hogy a fenti módszerrel meg tudjuk oldani a feladatot, először alakítunk kell a függvényen. Az ismert addíciós tétel (és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggés) szerint

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$$

amiből

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

És így

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)},$$

ahol az utolsó lépésben az $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x$ integrál meghatározása az előző feladatok mintájára megy (most nem részletezzük).