Lineáris belső függvény
(Segédanyag a 10.1.a-b feladattípusokhoz)

Összefoglaló. A **10.1.a-b** feladatainak többsége visszavezethető *lineáris helyettesítéssel* valamelyik alapintegrálra. Az alapintegrálokat a kiosztott segédanyagon találjuk, vagy például itt:
https://www.mathreference.org/index/page/id/55/lg/hu
A lineáris helyettesítés alatt azt értem, hogy a feladatbeli integrálandó függvény az integrálási táblázatban szereplő valamelyik alapfüggvényből kapható úgy, hogy x helyére $ax+b$ alakú belső függvényt írunk, valamely a és b konkrét számokkal. Ilyenkor úgy járunk el, hogy az integrálási szabálygyűjteményben a megfelelő primitív függvénybe is $(ax+b)$-t helyettesítünk, és ilyen alakban keressük a megoldást, ami egy konstans szorzóval való korrigálás után jó lesz (a-val kell osztani, de ezt inkább jobb végiggondolni).

Példa. Nézzünk egy konkrét példán:

$$\int \cos(3x-4)\mathrm{d}x = ?$$

Látjuk, hogy az integrálandó $\cos(3x-4)$-et a $\cos x$-ből kapjuk úgy, hogy x helyébe a $3x-4$ (lineáris) belső függvényt írjuk. A képletgyűjteményben látjuk, hogy

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{$*$}$$

A fenti összefoglaló szerint tehát $\sin(3x-4)$-gyel próbálkozunk (a képletgyűjteményből kiolvasott $\sin x$ primitív függvényben is $(3x-4)$-et írva x helyére):

$$(\sin(3x-4))' = \cos(3x-4)\cdot 3, \tag{$**$}$$

amit az összetett függvény deriválási szabálya szerint kaptunk $(*)$-ból (a 3-as szorzó a belső függvény deriváltja).
Emlékezzünk, hogy az a feladatunk, hogy találjuk egy olyan függvényt, amelynek a deriváltja $\cos(3x-4)$. Látjuk $(**)$-ból, hogy a $\sin(3x-4)$ már „majdnem jó”, mert a deriváltja a kívánt eredmény 3-szorosa. Ezt ugyanis könnyen korrigálhatjuk, ha elosztjuk a $\sin(3x-4)$ függvényt 3-mal (ami a konstans 1/3-dal szorzásnak felel meg, ezért a derivált is 3-dal osztódik):

$$\left(\frac{1}{3}\sin(3x-4)\right)' = \frac{1}{3}(\sin(3x-4))' = \frac{1}{3}(\cos(3x-4)\cdot 3) = \cos(3x-4),$$

tehát találtunk egy primitív függvényt:

$$\boxed{\int \cos(3x-4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x-4).}$$

Megjegyzés. Azoknak, akik tudják, hogy mi az a helyettesítéses integrálás: Ezek a feladattípusok az $y = ax+b$ helyettesítéssel mindig megoldhatók.

Az órán kimaradt feladatok megoldásai

1. $\int \sin(x+3)\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. A $\sin(x+3)$ függvényt a $\sin x$-ből kapjuk $x \leftsquigarrow x+3$ után. Mivel a $\sin x$ primitív függvénye $-\cos x$, ezért $-\cos(x+3)$-mal próbálkozunk ($x \leftsquigarrow x+3$ itt is):

$$(-\cos(x+3))' = \sin(x+3)\cdot 1 = \sin(x+3),$$

ahol az 1-es szorzó $(x+3)'$-ból jön. Ezzel meg is találtunk egy primitív függvényt:

$$\int \sin(x+3)\mathrm{d}x = -\cos(x+3).$$

2. $\int e^{-x}\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Az e^{-x} függvényt az e^x-ből kapjuk $x \leftsquigarrow -x$ után (a $-x$ is lineáris belső függvény!). Mivel az e^x primitív függvénye e^x, ezért e^{-x}-szel próbálkozunk:

$$(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-1).$$

Látjuk, hogy (-1)-gyel kell még osztanunk (vagy szoroznunk, ami ugyanaz), hogy jó legyen:

$$(-e^{-x})' = e^{-x},$$

azaz

$$\int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}.$$

3. $\int \frac{1}{2x+5}\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Az $\frac{1}{2x+5}$ függvényt az $\frac{1}{x}$-ből kapjuk $x \leftsquigarrow 2x+5$ után. Mivel az $\frac{1}{x}$ primitív függvénye $\ln|x|$, ezért $\ln|2x+5|$-szel próbálkozunk:

$$(\ln|2x+5|)' = \frac{1}{2x+5}\cdot(2x+5)' = \frac{1}{2x+5}\cdot 2,$$

ami az összetett függvény deriválása alapján adódik $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$-ből. A nem kívánt 2-es szorzót korrigáljuk:

$$\left(\frac{1}{2}\ln|2x+5|\right)' = \frac{1}{2x+5},$$

vagyis

$$\int \frac{1}{2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5|.$$

4. $\int \frac{1}{x^2+5}\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Először kicsit alakítunk az integrálandó függvényen:

$$(\diamondsuit)\qquad \frac{1}{x^2+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{5}+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}.$$

Mivel
$$\int \frac{1}{x^2+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\mathrm{d}x,$$
ezért elegendő az
$$\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$
integrált meghatározni. Vegyük észre, hogy az integrálandó függvény az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényből nyerhető $x \leftrightsquigarrow \frac{x}{\sqrt{5}}$ után. Az $\frac{1}{1+x^2}$ primitív függvénye az $\mathrm{arctg}\, x$, ezért $\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}$-tel próbálkozunk:
$$\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}},$$
A jobb oldali $\frac{1}{\sqrt{5}}$ szorzó helyett $\frac{1}{5}$ szorzó kell nekünk a ($\diamondsuit$) átalakítás alapján, ezért $\frac{1}{\sqrt{5}}$-tel szorzunk:
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{1}{5},$$
ahol a jobb oldal épp $\frac{1}{x^2+5}$, és így
$$\int \frac{1}{x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}.$$

5. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás. Ahhoz, hogy a fenti módszerrel meg tudjuk oldani a feladatot, először alakítunk kell a függvényen. Az ismert addíciós tétel (és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggés) szerint
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$$
amiből
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$
És így
$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)},$$
ahol az utolsó lépésben az $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x$ integrál meghatározása az előző négy feladat mintájára megy (most nem részletezzük).