A hiányzó számolások a 'Színezések' témakörhöz

A Hajnal Péter-féle segédanyag 2. tételéhez a következőt látjuk be:

1. Állítás.

$$(1+\ln 2^{k^2-k})\cdot\binom{k^2}{k}\cdot\frac{1}{2\binom{k^2/2}{k}}\le ck^2 2^{k-1},$$

valamely (k-tól nem függő) $c>0$ konstansra.

Bizonyítás.

$$\binom{k^2}{k}\cdot\frac{1}{2\binom{k^2/2}{k}}=$$

$$\frac{k^2(k^2-1)(k^2-2)\cdot\ldots\cdot(k^2-(k-1))}{k!}\cdot\frac{k!}{2\frac{k^2}{2}(\frac{k^2}{2}-1)(\frac{k^2}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{k^2}{2}-(k-1))}=$$

$$2^{k-1}\cdot\frac{k^2(k^2-1)(k^2-2)\cdot\ldots\cdot(k^2-(k-1))}{k^2(k^2-2)(k^2-4)\cdot\ldots\cdot(k^2-2(k-1))}=2^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{k^2-i}{k^2-2i}\le$$

$$2^{k-1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\le e2^{k-1}.$$

Az 1. egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy minden $i\in\{1,\ldots,k-1\}$ esetén

$$\frac{k^2-i}{k^2-2i}=1+\frac{i}{k^2-2i}\le 1+\frac{k-1}{k^2-2(k-1)}<1+\frac{k-1}{k^2-2k+1}=1+\frac{1}{k-1}.$$

A 2. egyenlőségnél pedig azt a jól ismert tényt, hogy minden $n\in\mathbb{Z}^+$ számra $(1+\frac{1}{n})^n<e$. Az így kapott kapott egyenlőtlenséget felhasználva, $k\ge 2$ esetén kapjuk, hogy

$$(1+\ln 2^{k^2-k})\cdot\binom{k^2}{k}\cdot\frac{1}{2\binom{k^2/2}{k}}\le(1+\ln 2^{k^2-k})e2^{k-1}=$$

$$(1+(k^2-k)\ln 2)e2^{k-1}=(k^2\ln 2-(k\ln 2-1))e2^{k-1}\le(k^2\ln 2)e2^{k-1}=(e\ln 2)k^2 2^{k-1},$$

ami bizonyítja az állítást $e\ln 2$ konstanssal. □

Pluhár András tételének bizonyítását a következő számolás fejezi be:

2. Állítás. Létezik olyan $c>0$ konstans, hogy

$$\left(c\sqrt[4]{k}2^{k-1}\right)^2\frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}<1.$$

(A tétel így $|\mathcal{H}|\le c\sqrt[4]{k}2^{k-1}$ esetén be lesz bizonyítva.)

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{(2k-1)!}{((k-1)!)^2}>\left(c\sqrt[4]{k}2^{k-1}\right)^2.$$

A faktoriálisok becslésére a Stirling-formula erős alakját használjuk:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}}<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Ebből kapjuk, hogy $k \geq 2$ esetén

$$\frac{(2k-1)!}{((k-1)!)^2} > \frac{\sqrt{2\pi(2k-1)}\left(\frac{2k-1}{e}\right)^{2k-1} e^{\frac{1}{12(2k-1)+1}}}{\left(\sqrt{2\pi(k-1)}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1} e^{\frac{1}{12(k-1)}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{e\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2k-1)^{2k-\frac{1}{2}}}{(k-1)^{2k-1}} \cdot e^{\frac{1}{24k-11}-\frac{1}{6(k-1)}} > \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2k-2)^{2k-\frac{1}{2}}}{(k-1)^{2k-1}} \cdot e^{\frac{1}{24k-11}-\frac{1}{6(k-1)}} =$$

$$\frac{2}{e\sqrt{\pi}}\sqrt{k-1} \cdot 2^{2k-2} \cdot e^{\frac{1}{24k-11}-\frac{1}{6(k-1)}} > \frac{2}{e\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{2}} \cdot 2^{2k-2} \cdot e^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{e^{\frac{7}{12}}\sqrt[4]{\pi}}\sqrt[4]{k}2^{k-1}\right)^2.$$

Itt az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $k \geq 2$ esetén $k-1 \geq \frac{k}{2}$, valamint az e kitevőjére

$$\frac{1}{24k-11} - \frac{1}{6(k-1)} > -\frac{1}{6(k-1)} \geq -\frac{1}{6}.$$

A kapott egyenlőtlenség pedig azt jelenti, hogy a $c := \frac{\sqrt[4]{2}}{e^{\frac{7}{12}}\sqrt[4]{\pi}}$ konstans megfelelő lesz, az állítást igazoltuk. $\square$