# A Cantor-halmaz

Először egy $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ halmazsorozatot definiálunk: Legyen $C_0$ a $[0,1]$ zárt intervallum, és $C_{n+1}$-et úgy kapjuk $C_n$-ből, hogy $C_n$-et véges sok diszjunkt zárt intervallum uniójaként felírva, mindegyik zárt intervallumból elhagyjuk a középső nyílt harmadát. (Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor $C_{n+1}$ is véges sok diszjunkt zárt intervallum uniója lesz, tehát értelmes a definíció.)

Vagyis $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$, és így tovább. Az alábbi ábrán a sorozat első 7 eleme van szemléltetve (nyilván $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$):

**Definíció:** A *Cantor-halmaz* az imént definiált $C_n$ halmazok metszete, azaz $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Kevésbé precízen fogalmazva, a középső harmadok elhagyását vég nélkül folytatjuk, és a megmaradt pontok halmaza a Cantor-halmaz. A Cantor-halmazt a továbbiakban $C$-vel jelöljük.

**1. állítás:** *A Cantor-halmaz kontinuum számosságú.*

**Bizonyítás:** Megadunk egy bijekciót a végtelen 0-1 sorozatok halmaza és $C$ pontjai között, ami igazolja az állítást. Tekintsünk egy tetszőleges 0-1 sorozatot, legyen ez $\mathbf{s}$. (A „biteket" úgy fogjuk interpretálni, hogy 0="bal", 1="jobb".)

Először egy zárt intervallumokból álló $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot rendelünk $\mathbf{s}$-hez: Legyen $I_1 := [0,\frac{1}{3}]$, ha $\mathbf{s}$ első eleme 0; legyen $I_1 := [\frac{2}{3},1]$, ha $\mathbf{s}$ első eleme 1. Legyen $I_2$ az $I_1$ intervallum baloldali harmada, ha $\mathbf{s}$ második eleme 0; legyen $I_2$ az $I_1$ intervallum jobboldali harmada, ha $\mathbf{s}$ második eleme 1. Analóg módon definiáljuk a többi $I_n$ intervallumot is (az $\mathbf{s}$ sorozat $n$-edik bitje azt mondja meg, hogy $I_n$-nek az $I_{n-1}$ bal- vagy jobboldali harmadát választjuk). Tehát ha például $\mathbf{s} = 011\dots$, akkor $I_1 = [0,\frac{1}{3}]$, $I_2 = [\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $I_3 = [\frac{8}{27},\frac{1}{3}]$ ... Az $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat egymásba skatulyázott zárt intervallumok összehúzódó sorozata, így az analízis órán tanultak szerint a $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ metszet nemüres, és egyetlen pontot tartalmaz, legyen ez $\phi(\mathbf{s})$. Mivel $I_n \subset C_n$ minden $n$ természetes számra, ez a $\phi(\mathbf{s})$ pont $C$-nek eleme.

Könnyű meggondolni, hogy ez a $\phi$ leképezés különböző 0-1 sorozatokhoz különböző $C$-beli pontot rendel (ha az $n$-edik bitben eltérés van, akkor az intervallumsorozatok $n$-edik tagjai diszjunktak), és minden $C$-beli pont előáll képként ($C$ tetszőleges $P$ pontjához megkonstruálható a megfelelő összehúzódó intervallumsorozat, és így a 0-1 sorozat is, ehhez mindössze mindegyik $C_n$-ből azt az intervallumot kell választani $I_n$-nek, amelyik tartalmazza $P$-t), azaz $\phi$ bijekció. $\square$

**2. állítás:** *A Cantor-halmaz elemei pontosan azok a $[0,1]$-beli számok, amelyeknek van olyan hármas számrendszerbeli alakja, hogy egyik jegy sem 1 (azaz mindegyik jegy 0 vagy 2).*

**Bizonyítás:** Vegyük észre, hogy $C_1$ pontosan azokat a számokat tartalmazza $[0,1]$-ből, amelyek hármas számrendszerben felírhatók $0{,}0\dots$ vagy $0{,}2\dots$ alakban, $C_2$ pontosan a számokat tartalmazza, amelyek felírhatók $0{,}00\dots$, $0{,}02\dots$, $0{,}20\dots$ vagy $0{,}22\dots$ alakban. És így tovább, $C_n$ pontosan azokat a számokat tartalmazza, amelyek hármas számrendszerben felírhatók úgy, hogy a „harmadosvessző" után álló első $n$ jegy között nincs 1-es. (Például az $\frac{1}{3}$ és a $\frac{2}{3}$ $C_1$-ben vannak – sőt, $C$-ben is –, itt az $\frac{1}{3} = 0{,}0\dot{2}$ és a $\frac{2}{3} = 0{,}2$ alakok megfelelőek.) A $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ definíció alapján a fentiekből azonnal adódik az állítás (a nem feltétlenül egyértelmű „harmadostört" alakok figyelembevételével is). $\square$

**Megjegyzés:** A 2. állításból is következik az 1. állítás, hiszen a 0 és 2 tagokból álló végtelen sorozatok halmaza kontinuum számosságú. Az 1. állítás bizonyításában megadott bijekció az $\mathbf{s} = s_1, s_2, s_3, \dots$ 0-1 sorozathoz éppen a $0{,}(2s_1)(2s_2)(2s_3)\dots$ $C$-beli számot rendeli (hármas számrendszerben felírva).

**3. állítás:** *A Cantor-halmaz Borel-mérhető, és Lebesgue-mértéke 0.*

**Bizonyítás:** A Cantor-halmaz zárt (mivel zárt halmazok metszete), és így Borel-mérhető. Az állítás második fele adódik abból, hogy a Cantor-halmaz $[0,1]$ alaphalmazon tekintett komplementerének Lebesgue-mértéke 1. Ez a mérték ugyanis az „elhagyott" intervallumok összhossza, azaz

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1. \quad \square$$