

Fokszámsorozatok realizációja.

Gráfelmélet

Programtervező informatikus MSc hallgatók részére

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2024.

KÖVETELMÉNYEK

Gyakorlat. A félév során **házi feladatokat** tűzök ki Coospace-en, melyek megoldását az ott megadott határidőig kell a rendszerbe feltölteni. + **Pluszontokat** is lehet szerezni órai munkával, illetve szorgalmi feladatok megoldásával.

Előadás. A hallgatóknak a tananyaghoz kapcsolódó számítógépes **projekt-munkát** kell készíteniük a vizsgaidőszak végéig, melynek témáját az oktató a hallgatóval egyeztetve jelöli ki a szorgalmi időszakban. A projektmunka kiváltható **írásbeli vizsgával** a vizsgaidőszakban a félév anyagából.

KÖVETELMÉNYEK

Gyakorlat. A félév során **házi feladatokat** tűzök ki Coospace-en, melyek megoldását az ott megadott határidőig kell a rendszerbe feltölteni. + **Pluszontokat** is lehet szerezni órai munkával, illetve szorgalmi feladatok megoldásával.

Előadás. A hallgatóknak a tananyaghoz kapcsolódó számítógépes **projekt-munkát** kell készíteniük a vizsgaidőszak végéig, melynek témáját az oktató a hallgatóval egyeztetve jelöli ki a szorgalmi időszakban. A projektmunka kiváltható **írásbeli vizsgával** a vizsgaidőszakban a félév anyagából.

Ponthatárok:

- 0 – 50%: elégtelen (1)
- 51 – 62%: elégséges (2)
- 63 – 75%: közepes (3)
- 76 – 87%: jó (4)
- 88 – 100%: jeles (5).

KÖVETELMÉNYEK

Gyakorlat. A félév során **házi feladatokat** tűzök ki Coospace-en, melyek megoldását az ott megadott határidőig kell a rendszerbe feltölteni. + **Pluszontokat** is lehet szerezni órai munkával, illetve szorgalmi feladatok megoldásával.

Előadás. A hallgatóknak a tananyaghoz kapcsolódó számítógépes **projekt-munkát** kell készíteniük a vizsgaidőszak végéig, melynek témáját az oktató a hallgatóval egyeztetve jelöli ki a szorgalmi időszakban. A projektmunka kiváltható **írásbeli vizsgával** a vizsgaidőszakban a félév anyagából.

TANKÖNYV (angol, de ehhez a kurzushoz íródott):

Csaba, Hajnal, Nagy: *Graph theory for MSc students in computer science*
<http://eta.bibl.u-szeged.hu/2479/>

KÖVETELMÉNYEK

Gyakorlat. A félév során **házi feladatokat** tűzök ki Coospace-en, melyek megoldását az ott megadott határidőig kell a rendszerbe feltölteni. + **Pluszontokat** is lehet szerezni órai munkával, illetve szorgalmi feladatok megoldásával.

Előadás. A hallgatóknak a tananyaghoz kapcsolódó számítógépes **projekt-munkát** kell készíteniük a vizsgaidőszak végéig, melynek témáját az oktató a hallgatóval egyeztetve jelöli ki a szorgalmi időszakban. A projektmunka kiváltható **írásbeli vizsgával** a vizsgaidőszakban a félév anyagából.

TANKÖNYV (angol, de ehhez a kurzushoz íródott):

Csaba, Hajnal, Nagy: *Graph theory for MSc students in computer science*
<http://eta.bibl.u-szeged.hu/2479/>

A KURZUS HONLAPJA:

https://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/graf_lev/

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Emlékeztetünk, hogy $\binom{V}{2}$ a V kételemű részhalmazainak halmazát jelöli.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

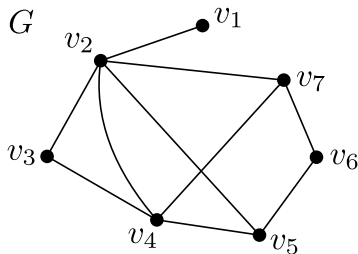
Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

$$E = \left\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\} \right\}.$$

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}\}$.

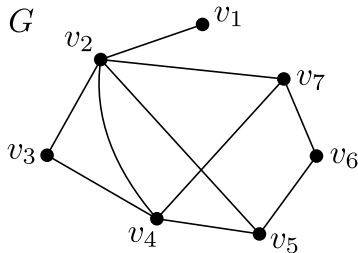
A példa szemléltetése.



Egyszerű gráf informálisan:

Véges sok csúcs (pont), bizonyos csúcspárok egy éllel összekötve.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

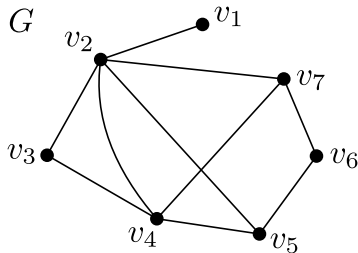


Jelölések. • Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a G gráf csúcshalmazáról, illetve élhalmazáról van szó, akkor $V(G)$ -t, illetve $E(G)$ -t írunk.

- Tehát $|V(G)|$ a G gráf csúcsszáma, $|E(G)|$ pedig az élszáma.
- Az $\{u, v\}$ élt (kételemű halmazt) az olvashatóság kedvéért uv alakban írjuk.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.

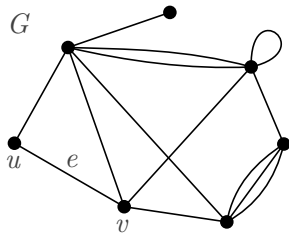
A V halmazt a gráf **csúcshalmazának** (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf **élhalmazának** (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



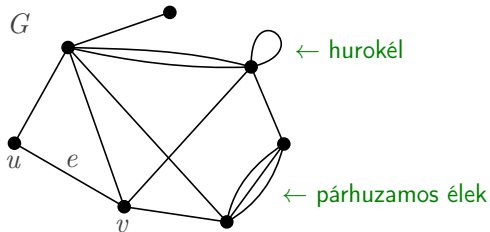
Konvenciók. • $uv \in E(G)$ esetén azt mondjuk, hogy „az u és v csúcsok összekötöttek / szomszédosak G -ben”.

• Élünk a gráf szemléletes jelentéséből adódó szóhasználat: „az uv él két végpontja u és v ”, „az $e = uv$ él illeszkedik az u csúcsra” stb.

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármaszt értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.

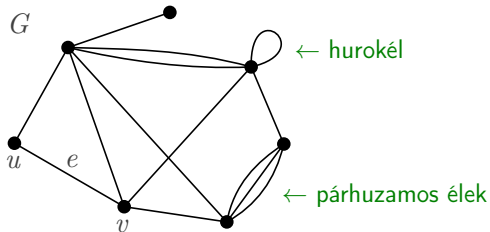


(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



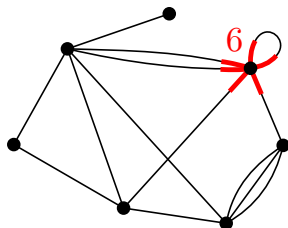
Általános gráfok esetén megengedett, hogy egy élnek egybeessen a két végpontja (az ilyen éleket **hurokéleknek** nevezzük), illetve két pont között egynél több él is haladhat (ez esetben ezen éleket **párhuzamos éleknek** vagy **többszörös élek** nevezzük).

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V -beli csúcsra illeszkedik.



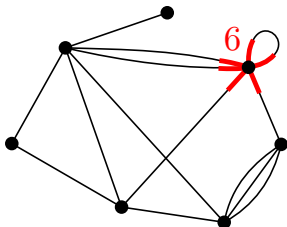
Megjegyzés. Az egyszerű gráfok tekinthetők általános gráfoknak is. (A szemléletes kép alapján ez nyilvánvaló. Formálisan, a (V, E) egyszerű gráfra tekinthetünk (V, E, I) gráfként, ahol az I illeszkedési reláció úgy van definiálva, hogy az $\{u, v\}$ él pontosan az u és v csúcsokra illeszkedik.) Egy gráf pontosan akkor egyszerű gráf, ha nem tartalmaz sem hurokért, sem párhuzamos éleket.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

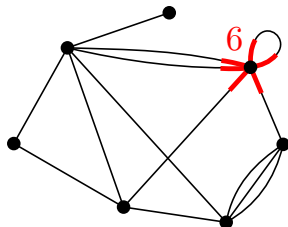
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (\text{\textit{v-re illeszkedő nemhurok élek száma}}) + 2 \cdot (\text{\textit{v-re illeszkedő hurokélek száma}}).$$

Fokszám.

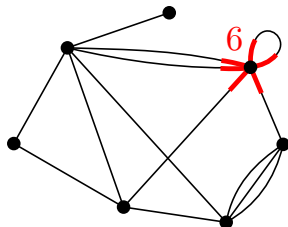


Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

$$d(v) = (\text{v-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (\text{v-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Megjegyzés. Egyszerű gráf esetén a v csúcs fokszáma a v szomszédainak száma.

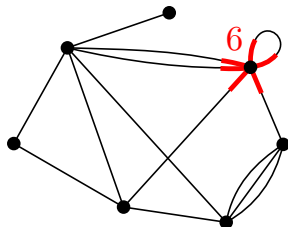
Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokért kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$ -vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d , és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor **d -reguláris** gráfról beszélünk.

Definíció. Egy gráf 0 fokú csúcsait **izolált csúcsoknak** nevezzük. •

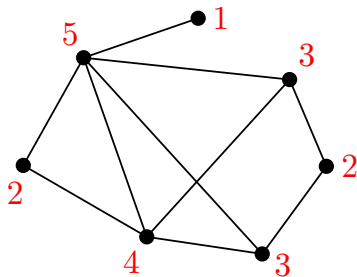
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

A gráfelmélet jelöléseinek gyakorlása kedvéért ugyanez formálisabban:

Tetszőleges G gráf esetén

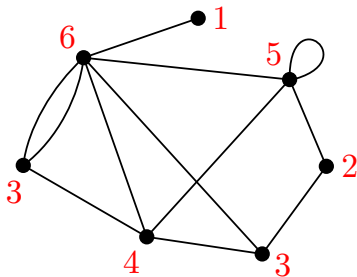
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



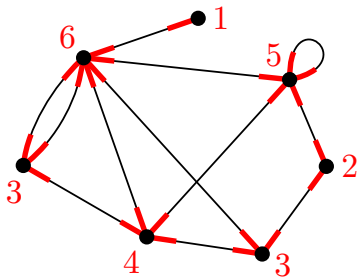
$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

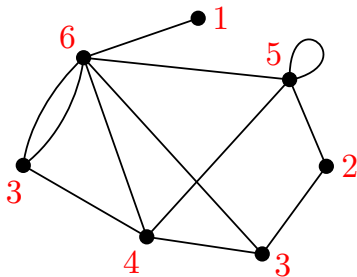


$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Bizonyítás. A fokszámösszeg is, és az élszám kétszerese is a gráfban található élvégeket számolja össze. (A fokszámösszeg csúcsonként csoportosítva számol; az élszámösszeg kétszerese pedig abból jön, hogy minden élnek két vége van.)



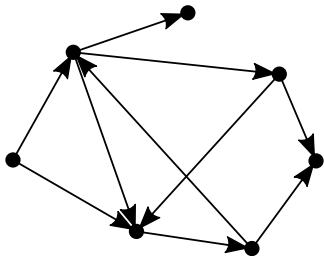
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



Következmény. Tetszőleges gráfban a fokszámok összege páros.

Másszóval. Tetszőleges gráfban páros sok páratlan fokszámú csúcs van.

Irányított gráf.

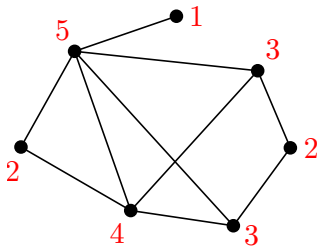


Az **irányított gráfokban** minden élnek van egy iránya. (Minden él az egyik végpontjából a másik felé mutat.) Informálisan, irányított gráfot úgy kapunk, hogy felveszünk egy irányítatlan (= „hagyományos”) gráfot, és minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A **precíz definíciót mellőzzük.**)

Megjegyzés. Amikor a továbbiakban (jelző nélkül) „gráfot” írunk, akkor mindig „irányítatlan gráfra” gondolunk.

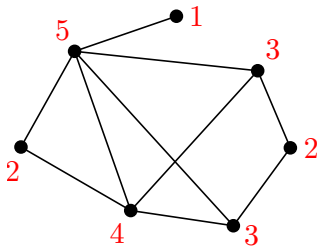
Def. Egy gráf **fokszámsorozata** alatt a csúcsai fokszámainak csökkenő sorrendbe rendezett sorozatát értjük.

Példa. Az ábrán látható gráf fokszámsorozata: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1.



Def. Egy gráf **fokszámsorozata** alatt a csúcsai fokszámainak csökkenő sorrendbe rendezett sorozatát értjük.

Példa. Az ábrán látható gráf fokszámsorozata: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1.

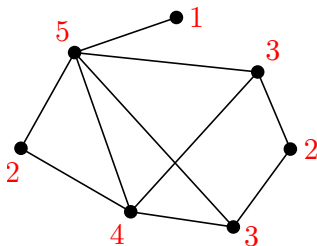


Fokszámsorozatok realizációja gráffal/egyszerű gráffal/stb.

INPUT: Adott egy nemnegatív egész számokból álló (csökkenő) d sorozat.

FELADAT: Döntsük el, hogy létezik-e olyan gráf/egyszerű gráf/stb., amelynek a fokszámsorozata d . (Ha létezik ilyen G gráf, akkor azt mondjuk, hogy G **realizálja** d -t.)

Példa. Az ábrán látható gráf fokszámsorozata: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1.



Fokszámsorozatok realizációja gráffal/egyszerű gráffal/stb.

INPUT: Adott egy nemnegatív egész számokból álló (csökkenő) d sorozat.

FELADAT: Döntsük el, hogy létezik-e olyan gráf/egyszerű gráf/stb., amelynek a fokszámsorozata d . (Ha létezik ilyen G gráf, akkor azt mondjuk, hogy G **realizálja** d -t.)

Például a 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1 sorozat realizálható egyszerű gráffal (pl. az ábrán láthatóval).

Realizálhatóság általános gráffal.

A nemnegatív egészekből álló, csökkenő $d_1, d_2, \dots, d_n$ sorozat akkor és csak akkor realizálható (általános) gráffal, ha $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ páros.

Bizonyítás. Egyszerű. Lásd Proposition 2.1 az angol jegyzetben.



Realizálhatóság általános gráffal.

A nemnegatív egészekből álló, csökkenő $d_1, d_2, \dots, d_n$ sorozat akkor és csak akkor realizálható (általános) gráffal, ha $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ páros.

Bizonyítás. Egyszerű. Lásd Proposition 2.1 az angol jegyzetben. □

Realizálhatóság hurokélmentes gráffal.

A nemnegatív egészekből álló csökkenő $d_1, d_2, \dots, d_n$ sorozat akkor és csak akkor realizálható hurokélmentes gráffal, ha

- $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ páros, ÉS
- $d_1 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n$.

(Megjegyezzük, hogy d_1 a sorozat (egyik) legnagyobb eleme, a csökkenő sorrend miatt.)

Nem bizonyítjuk.

Az egyszerű gráffal történő realizálhatóság eldöntése jóval nehezebb. Explicit jellemzés helyett egy algoritmust ismertetünk inkább. Ehhez szükségünk lesz a következő operációra:

Az egyszerű gráffal történő realizálhatóság eldöntése jóval nehezebb. Explicit jellemzés helyett egy algoritmust ismertetünk inkább. Ehhez szükségünk lesz a következő operációra:

Havel–Hakimi operáció. Adott egy nemnegatív egészekből álló csökkenő(!) $d_1, \dots, d_n$ sorozat (ahol $n \geq 2$); amelyet $\mathbf{d}$ -vel jelölünk. A $\mathbf{HH}(\mathbf{d})$ sorozatot a következőképpen defináljuk:

- Töröljük a $\mathbf{d}$ sorozat első elemét (d_1 -et), és utána
- a kapott sorozat $n - 1$ hosszú sorozat első d_1 elemét csökkentjük 1-gyel.

(Ha $d_1 > n - 1$, akkor második lépés nem értelmes; ekkor a $\mathbf{HH}(\mathbf{d})$ sorozatot nem defináljuk.)

Az egyszerű gráffal történő realizálhatóság eldöntése jóval nehezebb. Explicit jellemzés helyett egy algoritmust ismertetünk inkább. Ehhez szükségünk lesz a következő operációra:

Havel–Hakimi operáció. Adott egy nemnegatív egészekből álló csökkenő(!) $d_1, \dots, d_n$ sorozat (ahol $n \geq 2$); amelyet $\mathbf{d}$ -vel jelölünk. A $\text{HH}(\mathbf{d})$ sorozatot a következőképpen defináljuk:

- Töröljük a $\mathbf{d}$ sorozat első elemét (d_1 -et), és utána
- a kapott sorozat $n - 1$ hosszú sorozat első d_1 elemét csökkentjük 1-gyel.

(Ha $d_1 > n - 1$, akkor második lépés nem értelmes; ekkor a $\text{HH}(\mathbf{d})$ sorozatot nem defináljuk.)

Példák.

$5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1 \rightsquigarrow 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$

$3, 2, 2, 2, 2, 2, 1 \rightsquigarrow 1, 1, 1, 2, 2, 1$

$6, 4, 4, 3, 3, 1 \rightsquigarrow$ nem definiált.

Havel–Hakimi lemma. Az n nemnegatív egész számból álló csökkenő(!) $\mathbf{d}$ sorozat (ahol $n \geq 2$) pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

- $d_1 \leq n - 1$, ÉS
- a $\text{HH}(\mathbf{d})$ sorozat (csökkenő sorrendbe való rendezés után) realizálható egyszerű gráffal.

Havel–Hakimi lemma. Az n nemnegatív egész számból álló csökkenő(!) $\mathbf{d}$ sorozat (ahol $n \geq 2$) pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

- $d_1 \leq n - 1$, ÉS
- a $\text{HH}(\mathbf{d})$ sorozat (csökkenő sorrendbe való rendezés után) realizálható egyszerű gráffal.

Bizonyítás. Lásd Lemma 2.3 a jegyzetben.



Havel–Hakimi lemma. Az n nemnegatív egész számból álló csökkenő(!) $\mathbf{d}$ sorozat (ahol $n \geq 2$) pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

- $d_1 \leq n - 1$, ÉS
- a $\text{HH}(\mathbf{d})$ sorozat (csökkenő sorrendbe való rendezés után) realizálható egyszerű gráffal.

Bizonyítás. Lásd Lemma 2.3 a jegyzetben. □

Példák. Az $5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal. $\iff$ A $3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal.

Havel–Hakimi lemma. Az n nemnegatív egész számból álló csökkenő(!) d sorozat (ahol $n \geq 2$) pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

- $d_1 \leq n - 1$, ÉS
- a $HH(d)$ sorozat (csökkenő sorrendbe való rendezés után) realizálható egyszerű gráffal.

Bizonyítás. Lásd Lemma 2.3 a jegyzetben. □

Példák. Az $5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal. $\iff$ A $3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal.

A $3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal. $\iff$ A (rendezés utáni) $2, 2, 1, 1, 1, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal.

Havel–Hakimi lemma. Az n nemnegatív egész számból álló csökkenő(!) d sorozat (ahol $n \geq 2$) pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

- $d_1 \leq n - 1$, ÉS
- a $HH(d)$ sorozat (csökkenő sorrendbe való rendezés után) realizálható egyszerű gráffal.

Bizonyítás. Lásd Lemma 2.3 a jegyzetben. □

Példák. Az $5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal. $\iff$ A $3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal.

A $3, 2, 2, 2, 2, 2, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal. $\iff$ A (rendezés utáni) $2, 2, 1, 1, 1, 1$ sorozat realizálható egyszerű gráffal.

⋮

Ez iterálható. $\rightsquigarrow$ ALGORITMUS!

Egy adott nemnegatív egészekből álló, csökkenő d input sorozatra a következő algoritmus eldönti, hogy d realizálható-e egyszerű gráffal vagy sem.

Havel–Hakimi algoritmus (a d input sorozatra).

- Ha a d sorozat egyelemű, akkor d pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha a sorozat a 0 (és az algoritmus leáll).
- Ha a d sorozat első eleme legalább akkora, mint d elemszáma, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Különben, számítsuk ki $HH(d)$ -t:
- Ha a $HH(d)$ sorozat tartalmaz negatív számot, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Egyébként, rendezzük a $HH(d)$ sorozat elemeit csökkenő sorrendbe, és rekurzívan hívjuk meg az algoritmust a rendezett $HH(d)$ inputra. A kapott válasz lesz az eredeti d inputra adott válasz is.

Egy adott nemnegatív egészekből álló, csökkenő d input sorozatra a következő algoritmus eldönti, hogy d realizálható-e egyszerű gráffal vagy sem.

Havel–Hakimi algoritmus (a d input sorozatra).

- Ha a d sorozat egyelemű, akkor d pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha a sorozat a 0 (és az algoritmus leáll).
- Ha a d sorozat első eleme legalább akkora, mint d elemszáma, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Különben, számítsuk ki $HH(d)$ -t:
- Ha a $HH(d)$ sorozat tartalmaz negatív számot, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Egyébként, rendezzük a $HH(d)$ sorozat elemeit csökkenő sorrendbe, és rekurzívan hívjuk meg az algoritmust a rendezett $HH(d)$ inputra. A kapott válasz lesz az eredeti d inputra adott válasz is.

Példák. Lásd a Theorem 2.5 utáni két mintapéldát a jegyzetben.

Havel–Hakimi algoritmus (a d input sorozatra).

- Ha a d sorozat egyelemű, akkor d pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha a sorozat a 0 (és az algoritmus leáll).
- Ha a d sorozat első eleme legalább akkora, mint d elemszáma, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Különben, számítsuk ki $HH(d)$ -t:
- Ha a $HH(d)$ sorozat tartalmaz negatív számot, akkor d nem realizálható egyszerű gráffal (és az algoritmus leáll).
- Egyébként, rendezzük a $HH(d)$ sorozat elemeit csökkenő sorrendbe, és rekurzívan hívjuk meg az algoritmust a rendezett $HH(d)$ inputra. A kapott válasz lesz az eredeti d inputra adott válasz is.

Megjegyzés. A fenti rekurzív algoritmus bármikor megállhat "IGEN" visszatérési értékkel, ha az aktuális sorozat nyilvánvalóan realizálható egyszerű gráffal. A standard implementációkban az algoritmus a konstans $0, 0, \dots, 0$ sorozat megjelenésekor áll le "IGEN"-nel (nem kell eljutni az 1 hosszú sorozatig).